INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

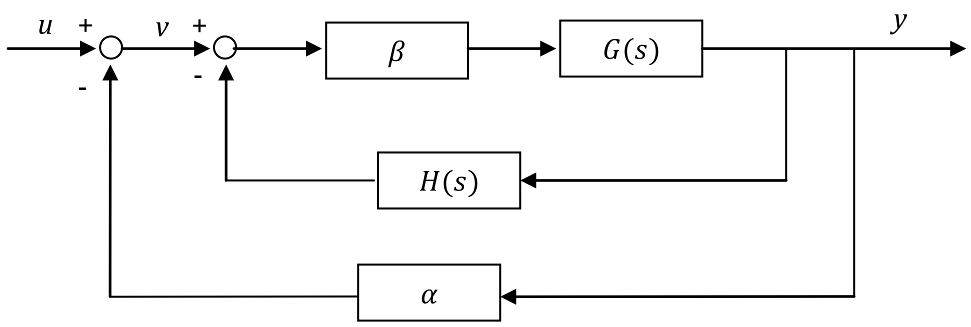
FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

ESERCIZI SUGLI SCHEMI A BLOCCHI

ESERCIZIO 1

Si consideri il seguente schema a blocchi:



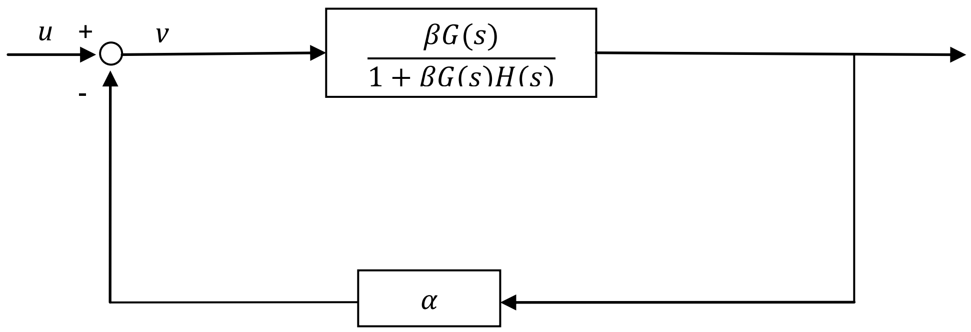
dove $G(s) = \frac{1}{s+1}, H(s) = \frac{s}{s+2}$, $\alpha, \beta > 0$.

a) Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva tra l'ingresso u e l'uscita y.

La funzione di trasferimento tra la variabile v e y si calcola come:

$$G_2(s) = \frac{\beta G(s)}{1 + \beta G(s)H(s)} = \frac{\beta(s+2)}{s^2 + (3+\beta)s + 2}$$

e dunque lo schema può essere riformulato come segue:



Da qui si ottiene la funzione di trasferimento cercata dalla retroazione negativa di $G_2(s)$ *e il parametro* α*, cioè*

$$G_{tot}(s) = \frac{\beta(s+2)}{s^2 + (3+\beta+\alpha\beta)s + 2 + 2\alpha\beta}$$

b) Si calcolino guadagno, tipo, poli, zeri della funzione di trasferimento ottenuta al punto a).

- *Guadagno:* $\mu = \frac{\beta}{1+\alpha\beta}$
- *tipo: g=0*
- *Poli: …*
- *Zero: s=-2*

c) Si discutano le proprietà di stabilità del sistema complessivo.

Affinchè i poli del sistema abbiano parte reale negativa (dato che il sistema presenta due poli), i segni dei coefficienti del denominatore della funzione di trasferimento devono essere concordi, per cui

$$\begin{cases} 3+\beta+\alpha\beta > 0 \\ 1+\alpha\beta > 0 \end{cases}$$

che sono verificate sotto l'ipotesi iniziale che $\alpha, \beta > 0$.

ESERCIZIO 2

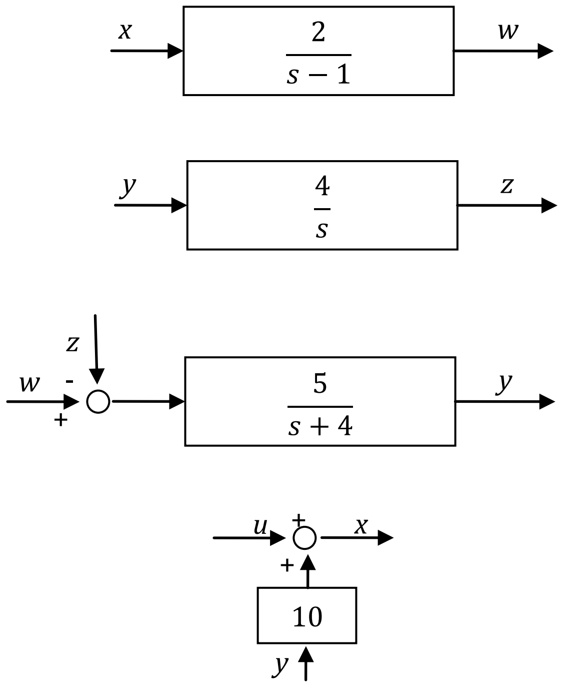
Si consideri il sistema dinamico con ingresso u e uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= w + 2x \\ \dot{z} &= 4y \\ \dot{y} &= -4y + 5(w - z) \end{aligned}$$

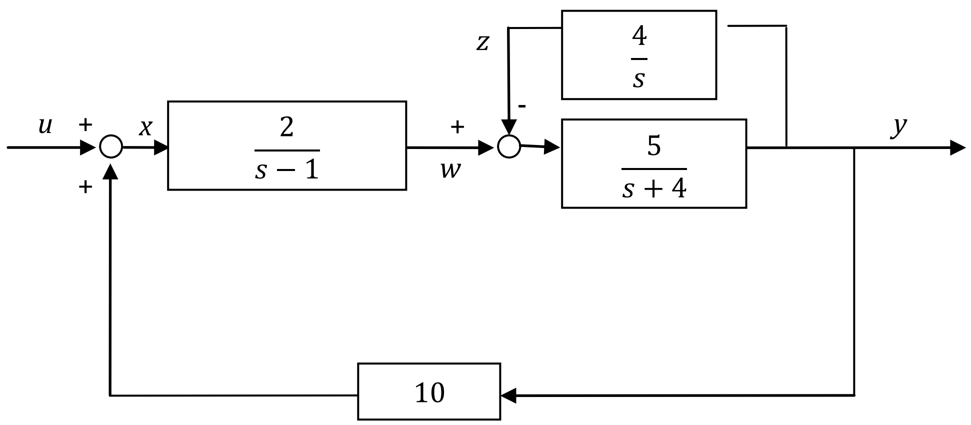
$$x = u + 10y$$

a) Si disegni lo schema a blocchi corrispondente

I blocchi corrispondenti con i sottosistemi visti sono



da cui lo schema complessivo risulta essere



b) Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva tra u e y.

La funzione di trasferimento complessiva è

$$G_{tot}(s) = \frac{10s}{(s-1)(s^2+4s+20)-100s}$$

c) Come si sarebbe potuta calcolare tale funzione di trasferimento in modo alternativo?

Considerando che il sistema può essere scritto come

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} w \\ z \\ y \end{bmatrix} + Bu$$

$$y = C \begin{bmatrix} w \\ z \\ y \end{bmatrix} + Du$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & -5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

da cui si calcola la funzione di trasferimento con la nota formula

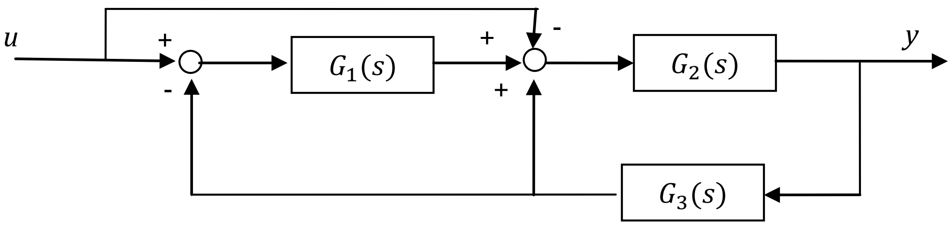
$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

d) Il sistema complessivo è asintoticamente stabile?

No, perché è violata la condizione necessaria sulla concordia dei segni dei coefficienti del polinomio caratteristico.

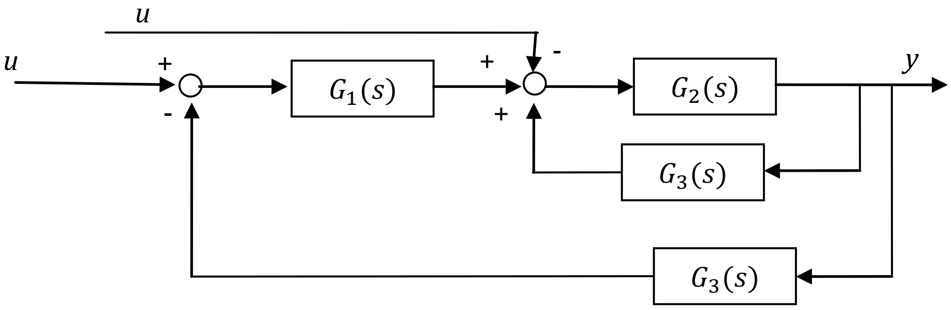
ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente schema a blocchi:

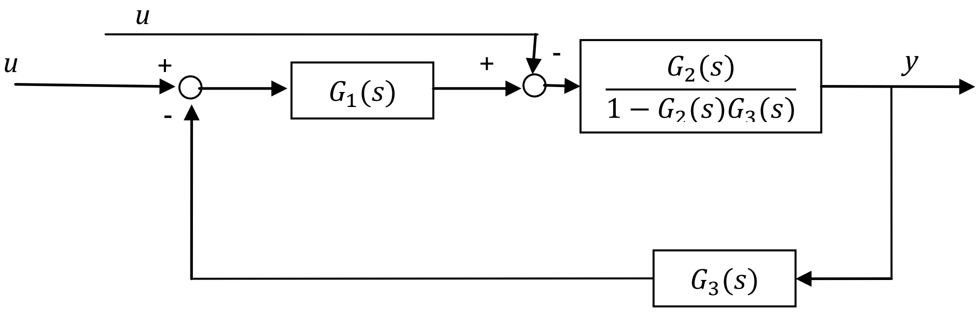


a) Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva tra l'ingresso *u* e l'uscita *y*.

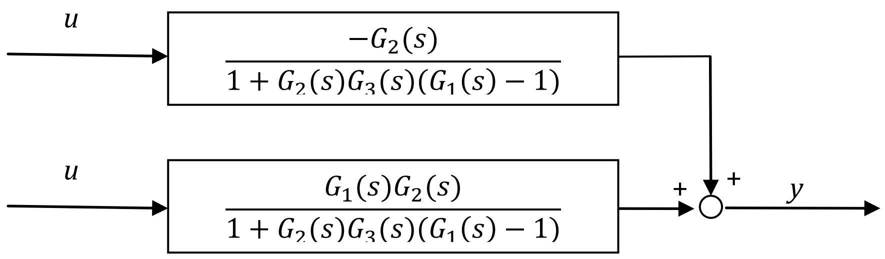
Lo schema precedente è equivalente al seguente:



che, a sua volta, può essere semplificato come segue:



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, considero l'effetto dei due ingressi (uguali e pari a u) separatamente, ottenendo che la funzione di trasferimento cercata può essere calcolata come il parallelo delle due seguenti:



da cui risulta che la funzione di trasferimento corrispondente è

$$G_{tot}(s) = \frac{G_2(s)(G_1(s)-1)}{1+G_2(s)G_3(s)(G_1(s)-1)}$$

b) Si ponga $G_1(s) = \frac{4(1+5s)}{1+4s}$, $G_2(s) = \frac{2}{s}$, $G_3(s) = k$. Per quali valori di k il sistema complessivo è asintoticamente stabile?

c) Si ponga k=100. qual è il valore di regime per l'uscita y a fronte di un ingresso costante $u(t)$=200?

ESERCIZIO 4

Si considerino i sistemi dinamici:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ w = [1 \quad 1] x - 4z \end{cases}$$

$$S_2: \qquad \dot{z} = -z + 2u + 5w$$

a) I sistemi dati, se presi singolarmente, sono asintoticamente stabili?

Il polinomio caratteristico di S_1 è:

$$p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 1) + 8 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

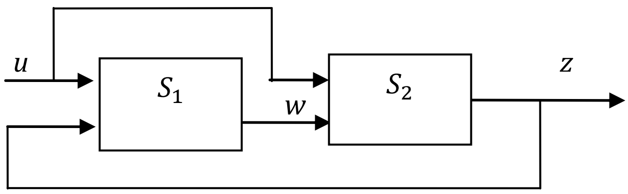
i cui coefficienti sono concordi, condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità di S_1 (isolato). S_2 è anche esso, se preso isolatamente, asintoticamente stabile (l'autovalore è pari a -1).

b) Considerando che

- per il sistema S_1 gli ingressi sono u e z e l'uscita è w,

- per il sistema S_2 gli ingressi sono u e w e l'uscita è z,

si disegni lo schema a blocchi complessivo che mostri le interconnessioni tra i sottosistemi dati, e che abbia come ingresso u e uscita z.



c) Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva tra l'ingresso u e l'uscita z.

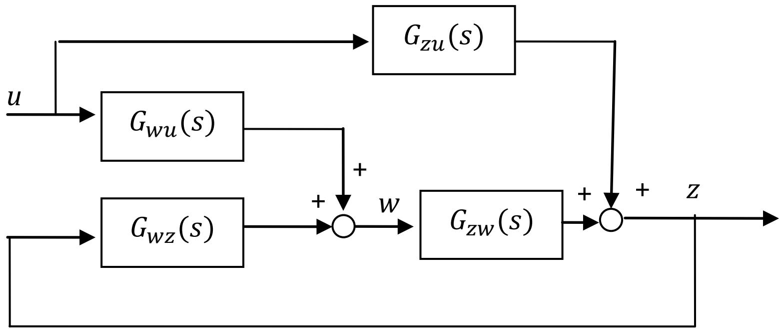
Le funzioni di trasferimento che legano, per i sottosistemi isolati, le variabili di ingresso alle uscita sono le seguenti. Per il sottosistema S1, avente come ingressi u e z e come uscita w,

$$G_{wu}(s) = \frac{s-3}{s^2 + 2s + 5}, G_{wz}(s) = -4$$

mentre per il sottosistema S2, avente come ingressi u e w e uscita z:

$$G_{zu}(s) = \frac{2}{s+1}, G_{zw}(s) = \frac{5}{s+1}$$

Lo schema di interconnessioni visto al punto b) dà luogo al seguente schema a blocchi

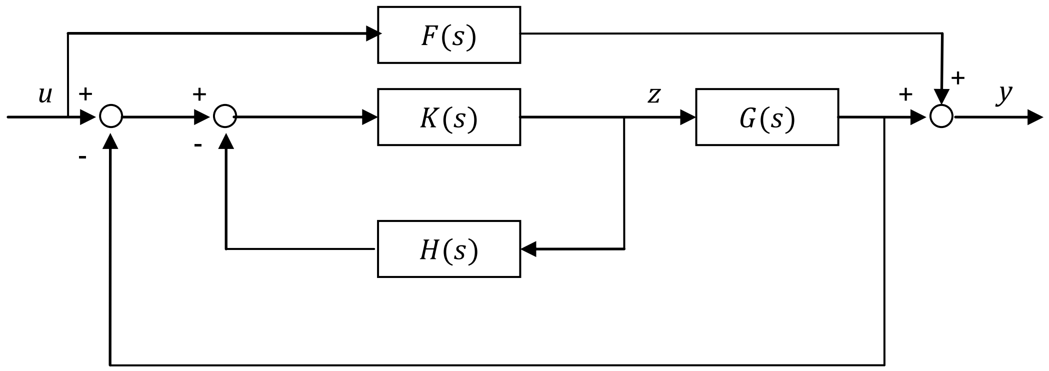


La funzione di trasferimento complessiva tra l'ingresso u e l'uscita z è pertanto pari a

$$G_{tot}(s) = \frac{G_{zu}(s) + G_{wu}(s)G_{zw}(s)}{1 - G_{zw}(s)G_{wz}(s)} = \frac{2s^2 + 9s - 5}{(s^2 + 2s + 5)(s + 21)}$$

ESERCIZIO 5

Si consideri lo schema a blocchi seguente:



a) Si calcoli la funzione di trasferimento tra l'ingresso u e la variabile z.

La funzione di trasferimento risultante è:

$$G_{zu}(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)(G(s) + H(s))}$$

b) Si calcoli la funzione di trasferimento tra l'ingresso u e la variabile y.

La funzione di trasferimento risultante è:

$$G_{yu}(s) = F(s) + \frac{G(s)K(s)}{1 + K(s)(G(s) + H(s))}$$