POLITECNICO DI MILANO

Risposte allo scalino di sistemi del I e II ordine

Marcello Farina

Sommario

- Struttura generale delle funzioni di trasferimento
- Caratteristichedella risposta allo scalino di principale interesse
- Risposte allo scalino
- Ritardo di tempo
- Approssimazione di sistemi di ordine superiore

$$G(s) = \boxed{\frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1+2\zeta_i s/\alpha_{ni}+s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1+T_i s) \prod_i (1+2\xi_i s/\omega_{ni}+s^2/\omega_{ni}^2)}}$$

"Forma di Bode"

$$= \frac{\rho \prod_i (s+z_i) \prod_i (s^2+2\zeta_i \alpha_{ni} s+\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s+p_i) \prod_i (s^2+2\xi_i \omega_{ni} s+\omega_{ni}^2)}$$

- **Poli** reali: $s = -p_i = -\frac{1}{T_i}$
- **Zeri** reali: $s = -z_i = -\frac{1}{\tau_i}$
- μ: **guadagno** del sistema (oss: $\mu=G(0)$ solo se $g=0$)
- ρ: **costante di trasferimento**
- g: **tipo** del sistema (intero positivo o negativo) – rappresentano poli (se $g>0$) o zeri (se $g<0$) nell'origine.

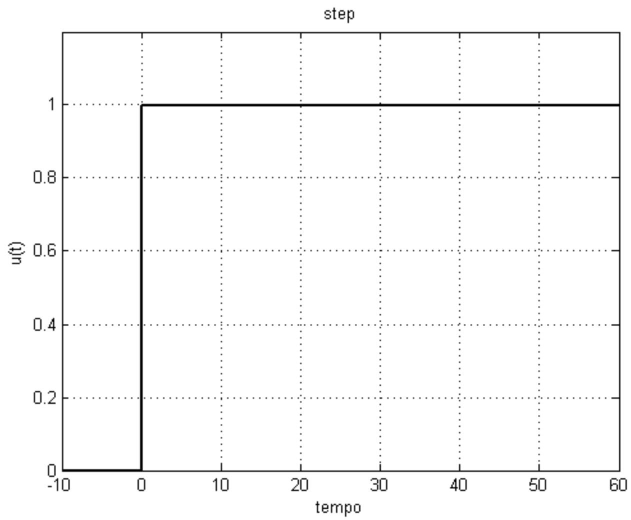
- **Poli** complessi coniugati: $s = -\xi_i\omega_{ni} \pm j\omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i^2}$, dove ω_{ni} è la **pulsazione naturale** e ξ_i è lo **smorzamento** della coppia di poli

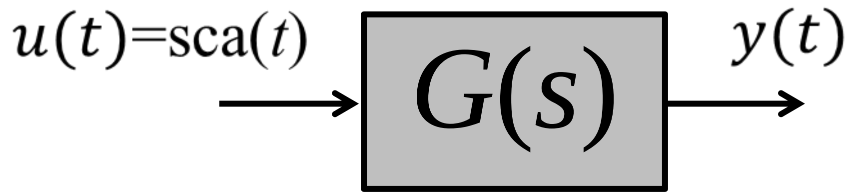
- **Zeri** complessi coniugati: $s = -\zeta_i\alpha_{ni} \pm j\alpha_{ni}\sqrt{1-\zeta_i^2}$, dove α_{ni} è la **pulsazione naturale** e ζ_i è lo **smorzamento** della coppia di zeri

Sommario

- Struttura generale delle funzioni di trasferimento
- Caratteristichedella risposta allo scalino di principale interesse
- Risposte allo scalino
- Ritardo di tempo
- Approssimazione di sistemi di ordine superiore

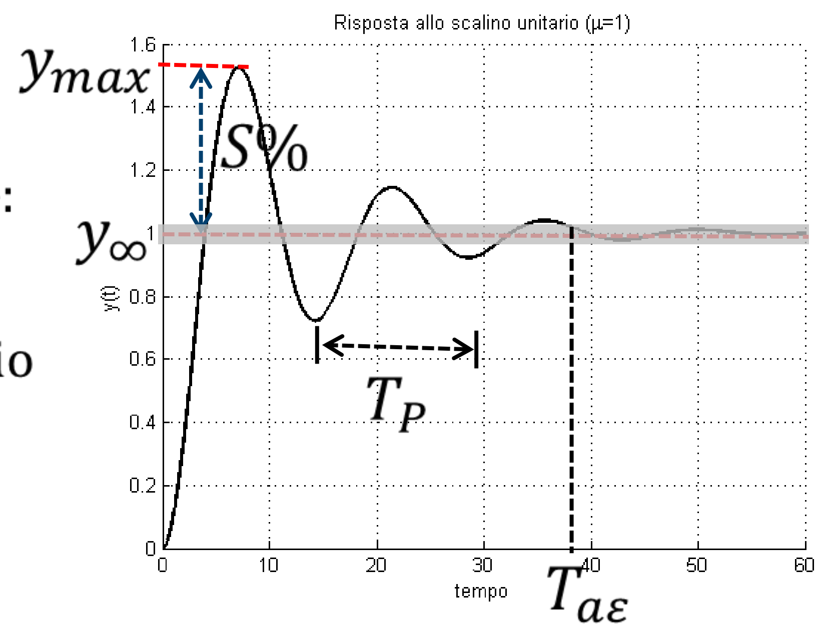
Caratteristiche di principale interesse della risposta allo scalino





$$\mu = 1, y_0 = 0$$

- **Valore di regime** y_∞: $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$
- **Valore massimo**: $y_{max} = \max_{t\geq 0} y(t)$
- **Sovraelongazione massima percentuale**: $S\% = 100\,\frac{y_{max}-y_\infty}{y_\infty}$
- **Tempo di assestamento**: tempo necessario affinchè $|y(t) - y_\infty| < \varepsilon y_\infty \;\forall t \geq T_{a\varepsilon}$
- **Periodo di oscilllazione** T_P: distanza temporale tra due massimi dell'uscita



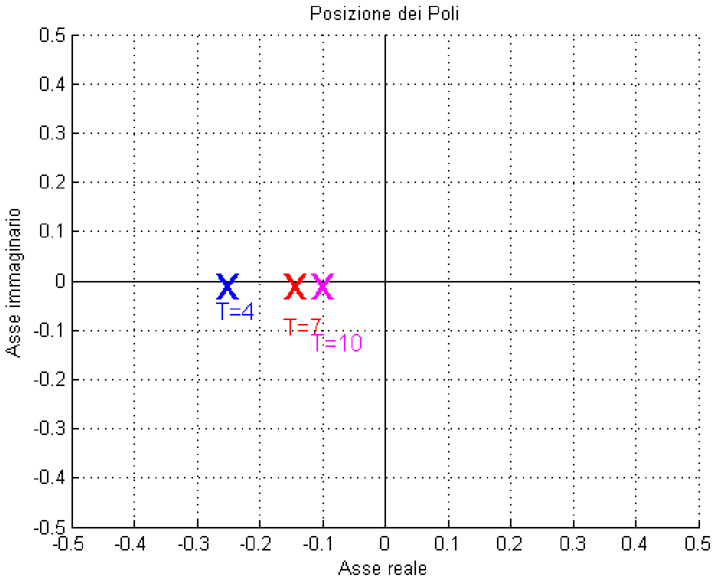
Sommario

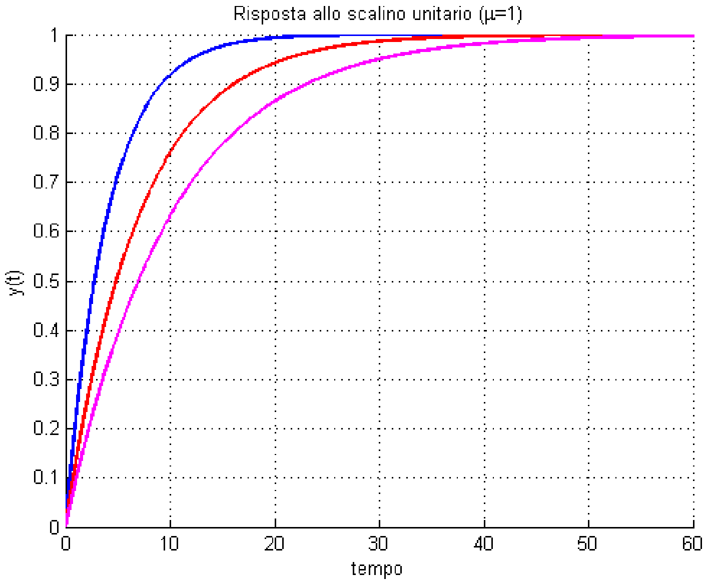
- Struttura generale delle funzioni di trasferimento
- Caratteristichedella risposta allo scalino di principale interesse
- Risposte allo scalino
- Ritardo di tempo
- Approssimazione di sistemi di ordine superiore

Sistemi del I ordine

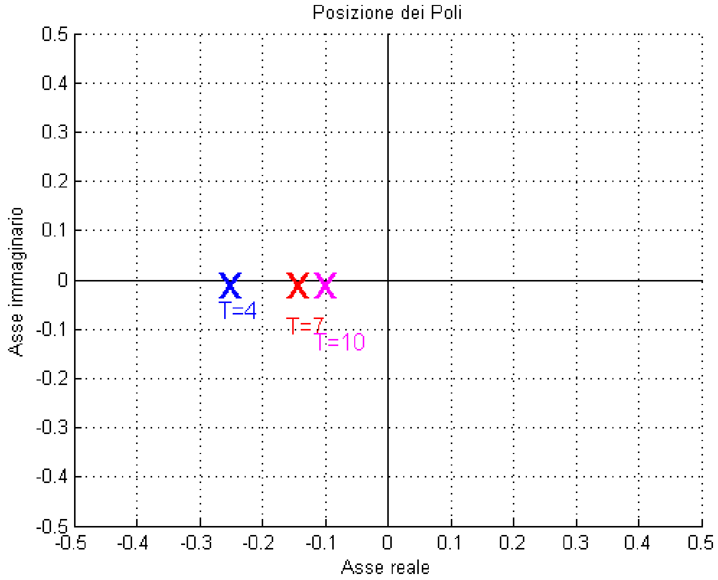
$$G(s) = \frac{\mu}{1+Ts}$$

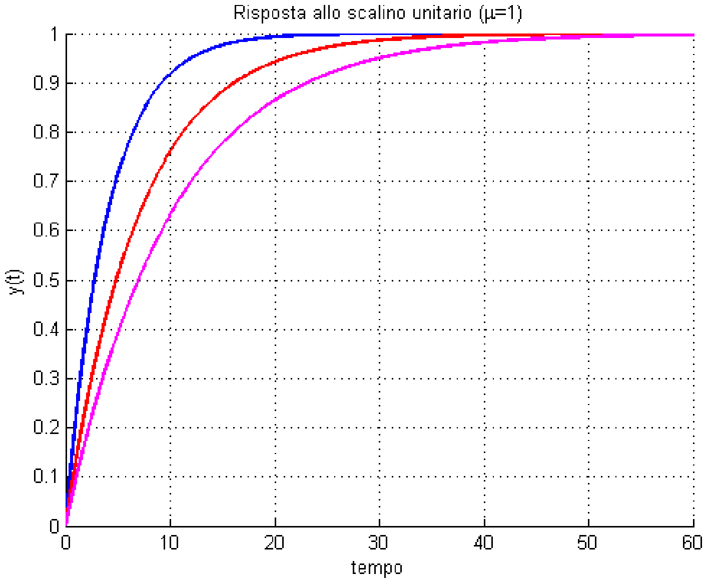
$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{s(1+Ts)} \rightarrow y(t) = \mu(1-e^{-\frac{t}{T}})sca(t)$$





$$y(t) = \mu(1 - e^{-\frac{t}{T}})sca(t)$$





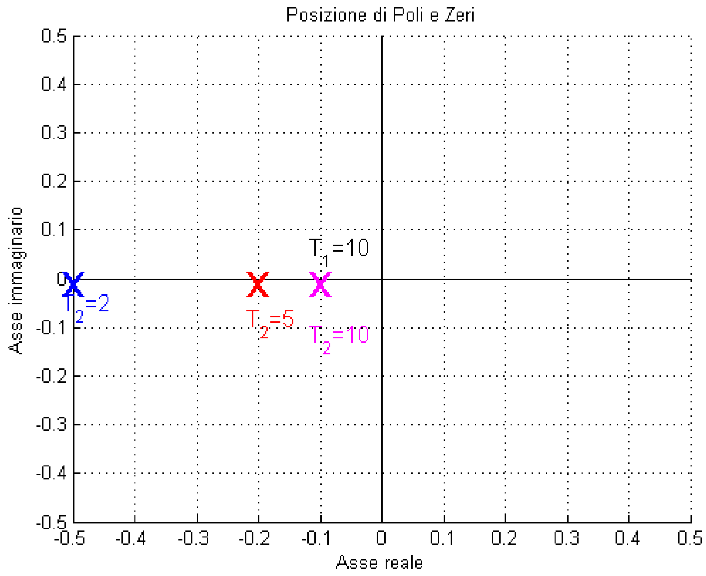
- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \dot{y}(0) = \frac{\mu}{T}$
- Più diminuisce T (il polo si sposta a sinistra) più diminuisce il tempo di salita
- Il tempo di assestamento è $T_{a\varepsilon} = T|\log(0.01\varepsilon)|$, per esempio $T_{a5} \cong 3T$, $T_{a1} \cong 4.6T$

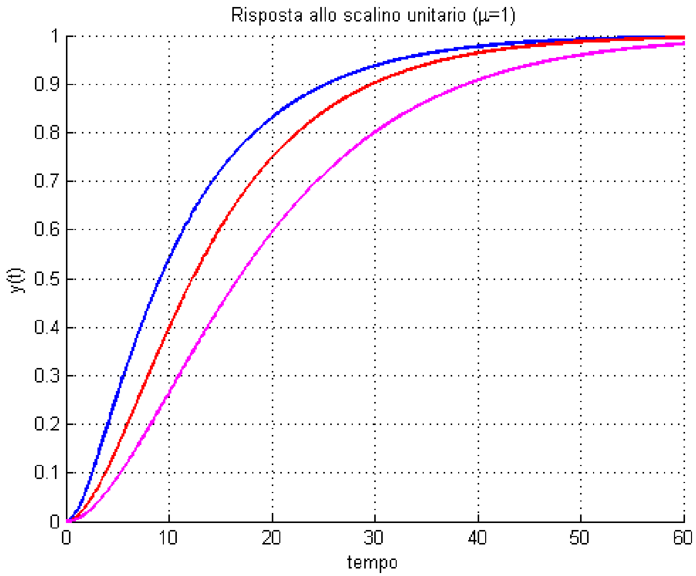
Sistemi del II ordine – due poli reali ($T_1 > T_2 > 0$)

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$y(t) = \mu(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}) sca(t)$$

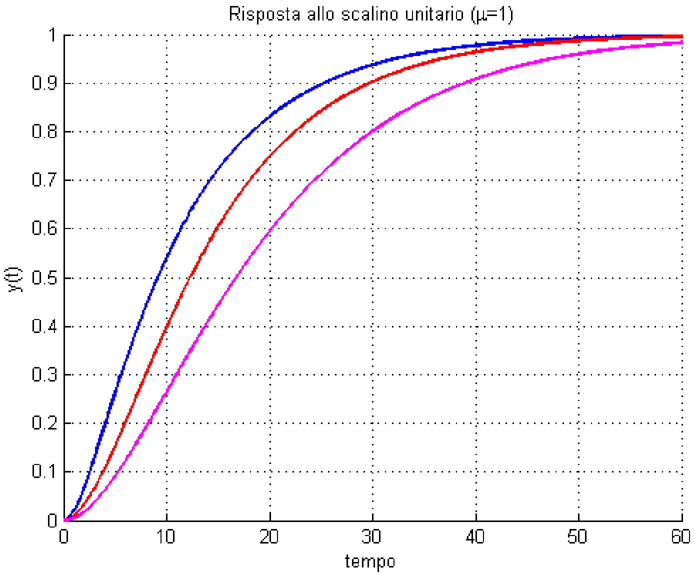




Sistemi del II ordine – due poli reali ($T_1 > T_2 > 0$)

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) sca(t)$$

- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \geq 0 \ \ \forall t$
- $\dot{y}(0) = 0$
- Più diminuiscono T_1 e T_2 (i poli si spostano a sinistra) più diminuiscono il tempo di salita e il tempo di assestamento $T_{a\varepsilon}$ (la relazione non è immediata)
- Se $T_2 \ll T_1$ l'esponenziale più lenta (avente costante di tempo T_1) domina la forma della risposta, e si ottiene (per $t \geq 4 \div 5\ T_2$) che



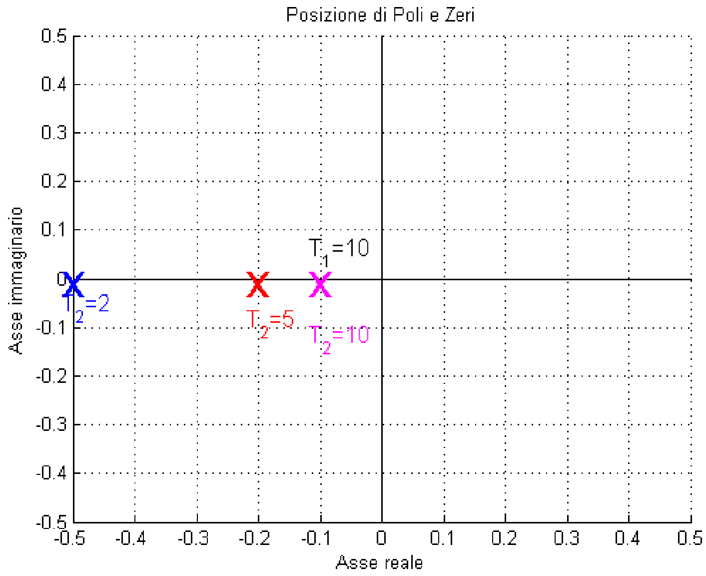
$$y(t) \cong \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) sca(t)$$

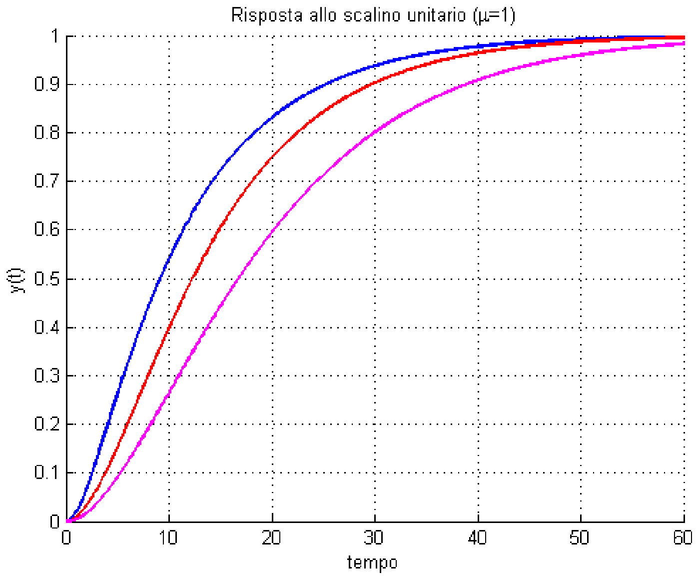
Sistemi del II ordine – due poli reali coincidenti ($T_1 = T_2 = T > 0$)

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + T\ \ s)^2}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{s(1 + T\ \ s)^2}$$

$$y(t) = \mu(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}})sca(t)$$

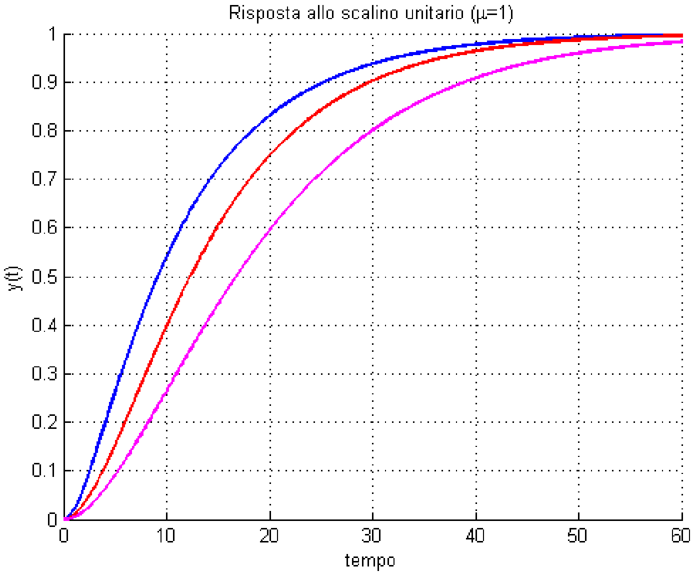




Sistemi del II ordine – due poli reali coincidenti ($T_1 = T_2 = T > 0$)

$$y(t) = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}}\right) sca(t)$$

- L'andamento qualitativo è simile al caso precedente (per $T_2 \cong T_1$)
- In questo caso è possibile valutare il tempo di assestamento:
  - $T_{a5} \cong 4.74T$,
  - $T_{a1} \cong 6.64T$



Sistemi del II ordine – Poli reali distinti ($T_1 > T_2 > 0$) e uno zero ($\tau \neq T_1, \tau \neq T_2$)

$$G(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

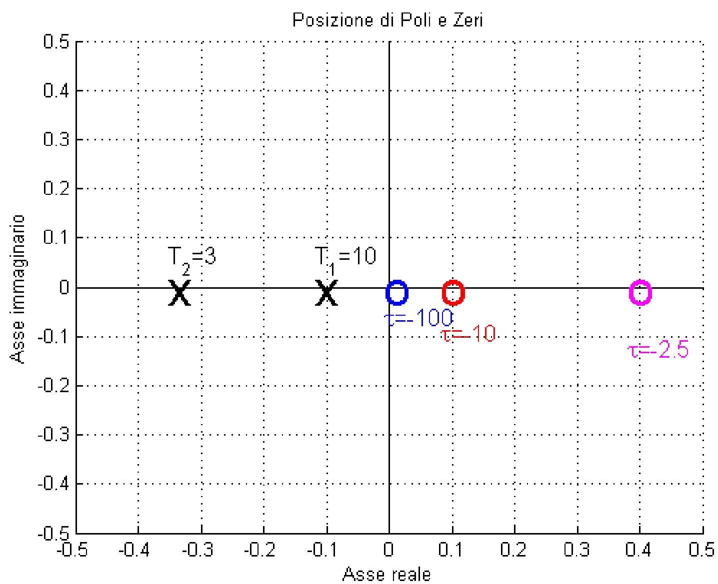
$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) sca(t)$$

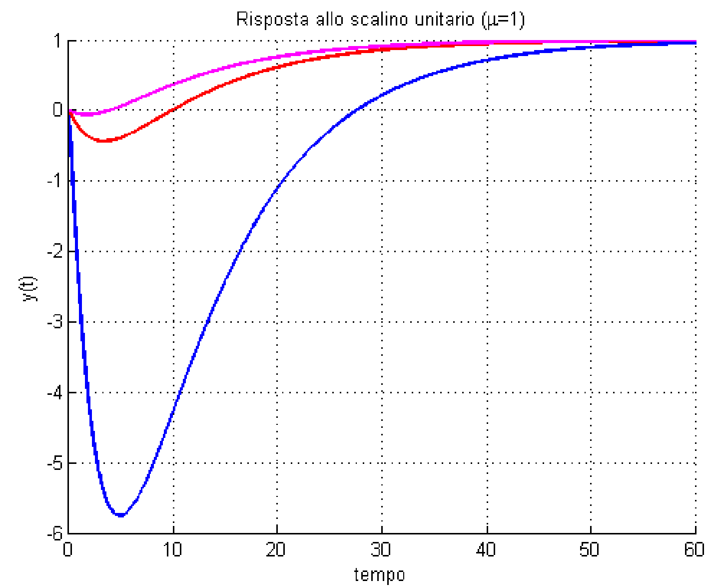
- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1-T_2}\left(\frac{T_1-\tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2-\tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$
- $\dot{y}(0) = \frac{\mu\tau}{T_1 T_2}$ → dipende dal segno di τ!

$$y(t) = \mu(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}) sca(t)$$

CASO I: $\tau < 0$

$\dot{y}(0) < 0$: c'è «sottoelongazione» (RISPOSTA INVERSA), che è tanto più pronunciata tanto più $|\tau|$ assume valori elevati (lo zero si avvicina all'origine)





In generale, quando ci sono zeri con parte reale positiva ($s = -\frac{1}{\tau} > 0$) si verifica il fenomeno della **risposta inversa**.

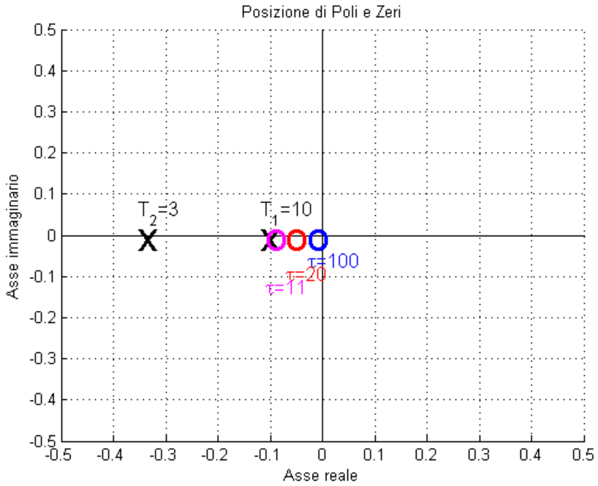
Sistemi del II ordine – Poli reali distinti ($T_1 > T_2 > 0$) e uno zero ($\tau \neq T_1, \tau \neq T_2$)

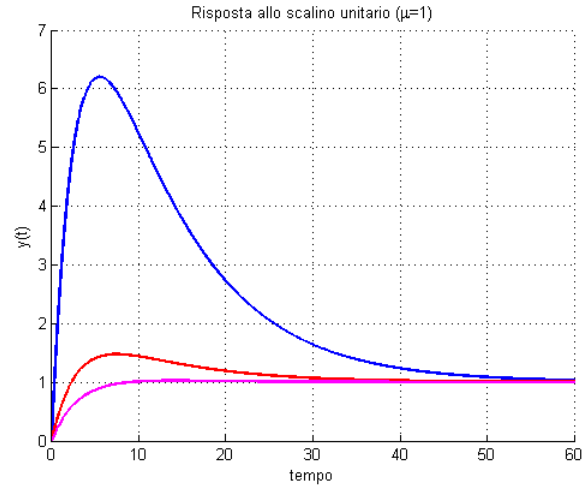
CASO II: $\tau > T_1$

- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2}\left(\frac{T_1 - \tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - \tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$
- $\dot{y}(0) > 0$ (crescente al tempo $t = 0$)
- Esiste istante $\bar{t} > 0$ in cui derivata cambia segno:

$$\bar{t} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \left|\log\left(\frac{T_1 - \tau}{T_2 - \tau}\frac{T_2}{T_1}\right)\right|$$

cioè una sovraelongazione, che è tanto più marcata tanto il valore di τ aumenta (lo zero si avvicina all'origine)

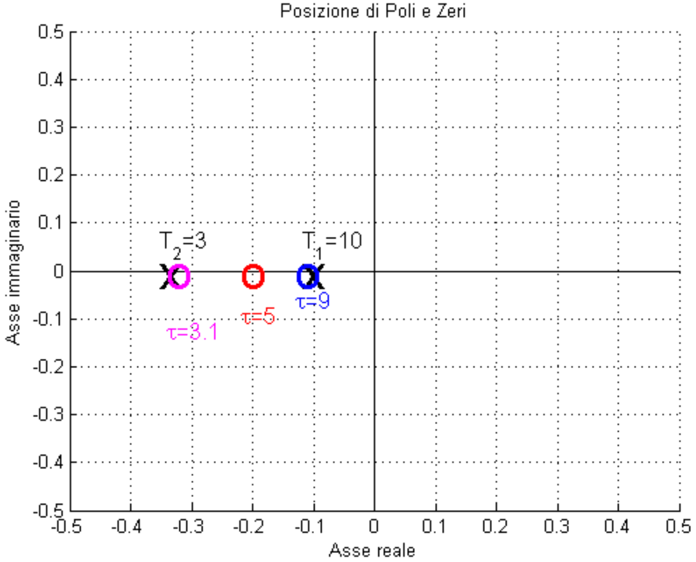


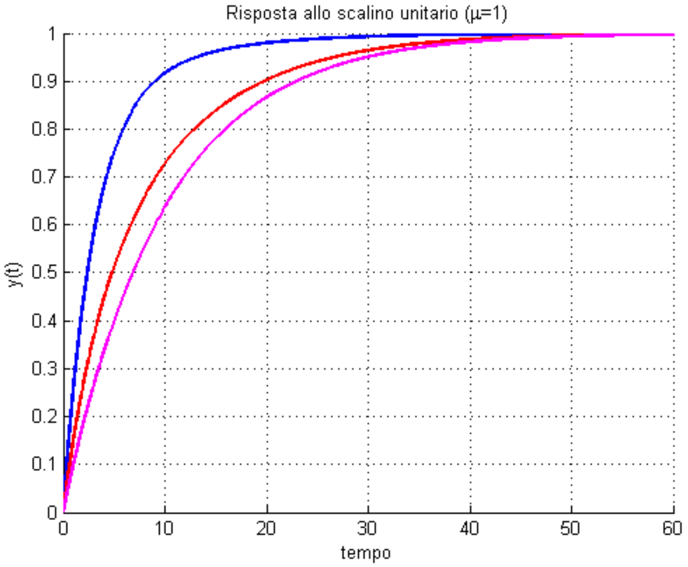


In generale, quando ci sono zeri con parte reale negativa e modulo minore di quello dei poli (reali) si verifica il fenomeno delle sovraelongazioni (senza oscillazioni).

CASO III: $T_1 > \tau > T_2$

- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2}\left(\frac{T_1 - \tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - \tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \geq 0 \ \forall t$





Sistemi del II ordine – Poli reali distinti ($T_1 > T_2 > 0$) e uno zero ($\tau \neq T_1, \tau \neq T_2$)

CASO III: $T_1 > \tau > T_2$

- Se $\tau \cong T_1$ l'andamento dell'uscita può essere approssimato con

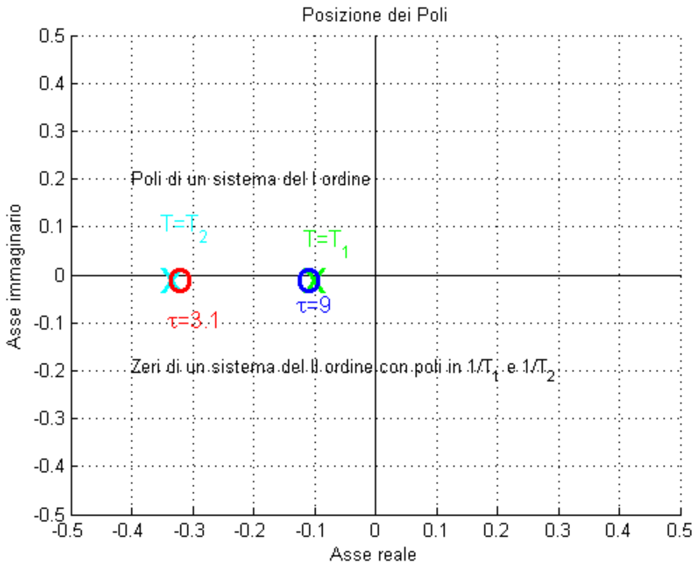
$$y(t) \cong \mu(1 - e^{-\frac{t}{T_2}})$$

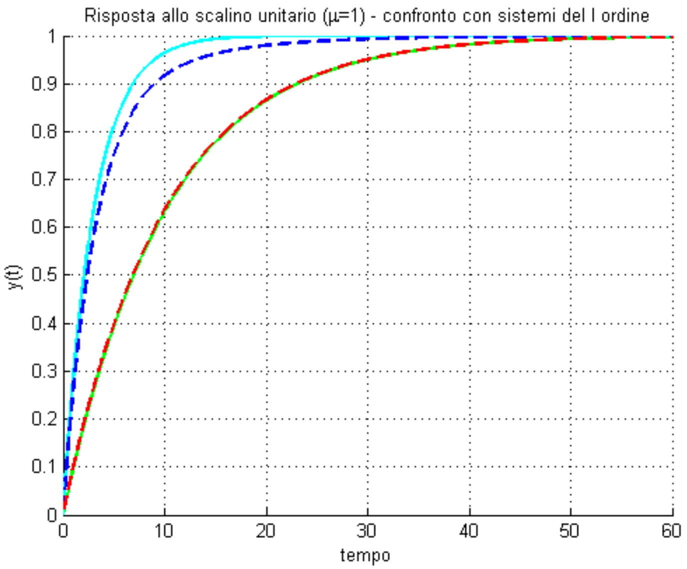
Anche se le risposte sono leggermente diverse (coppia polo/zero trascurata ha dinamiche lente)

- Se $\tau \cong T_2$ l'andamento dell'uscita può essere approssimato con

$$y(t) \cong \mu(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

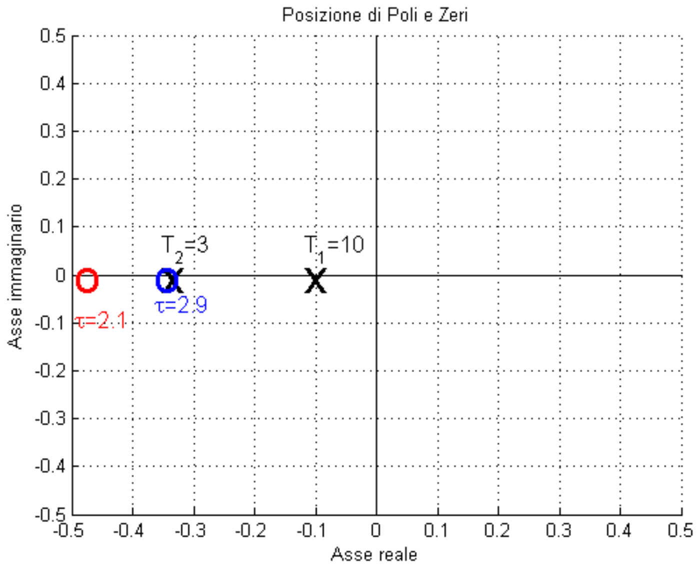
e in questo caso non si verifica il fenomeno della deriva lenta perché il polo trascurato ha dinamiche veloci

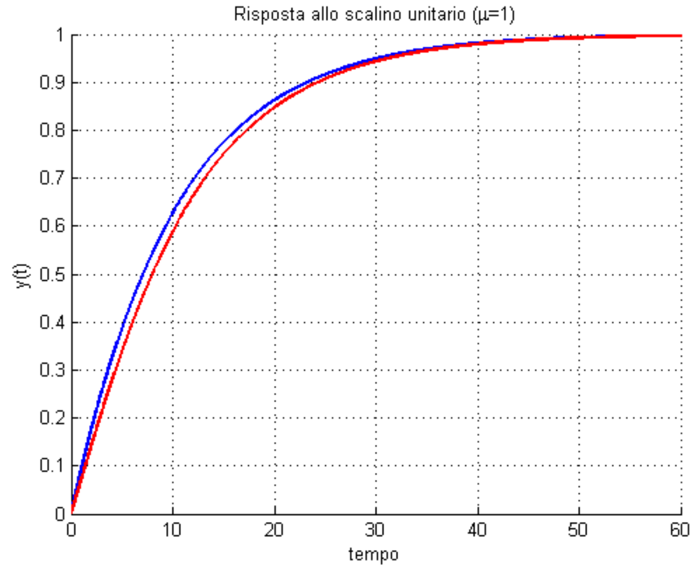




CASO IV: $T_1 > T_2 > \tau$

- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2}\left(\frac{T_1 - \tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - \tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \geq 0 \; \forall t$



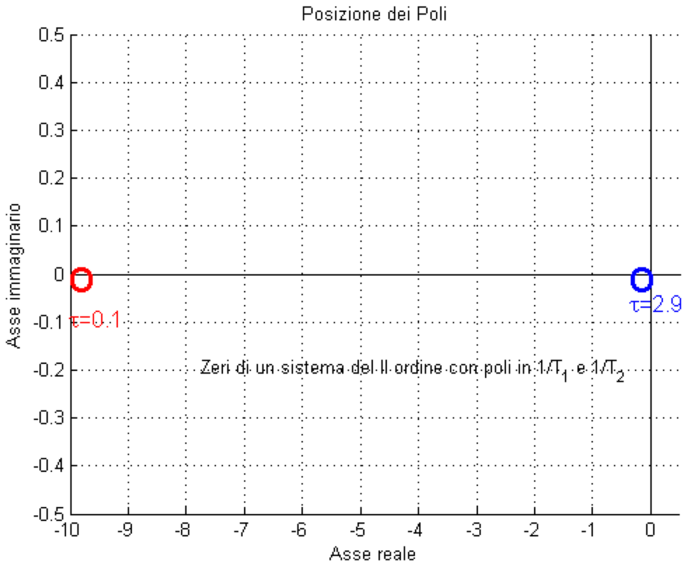


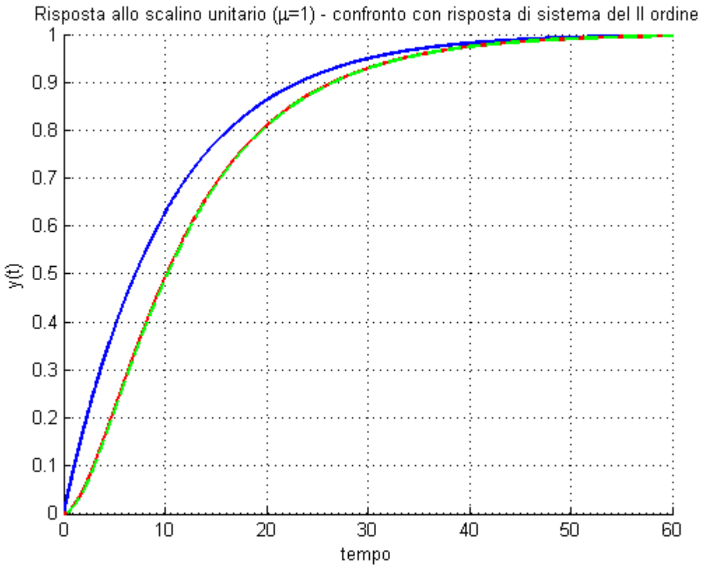
CASO IV: $T_1 > T_2 > \tau$

- Come già visto, se $\tau \cong T_2$ l'andamento dell'uscita può essere approssimato con

$$y(t) \cong \mu(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

- Più τ diminuisce (il polo si «allontana» a sinistra) più la risposta tende a quella del sistema del II ordine privo di zeri (caso II).





Sistemi del II ordine – poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{\mu\omega_n^{\,2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}} \rightarrow \text{poli in } s = -\xi_i\omega_{ni} \pm j\omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i^{\,2}}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu\omega_n^{\,2}}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2})}$$

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{\boxed{-\xi\omega_n t}}\sin\left(\boxed{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}\, t + \arccos(\xi)\right)\right)sca(t)$$

Parte reale dei poli   Parte immaginaria dei poli

- Se $\xi > 0$ il sistema è asintoticamente stabile
- Se $\xi = 0$ il sistema è semplicemente stabile e la risposta è

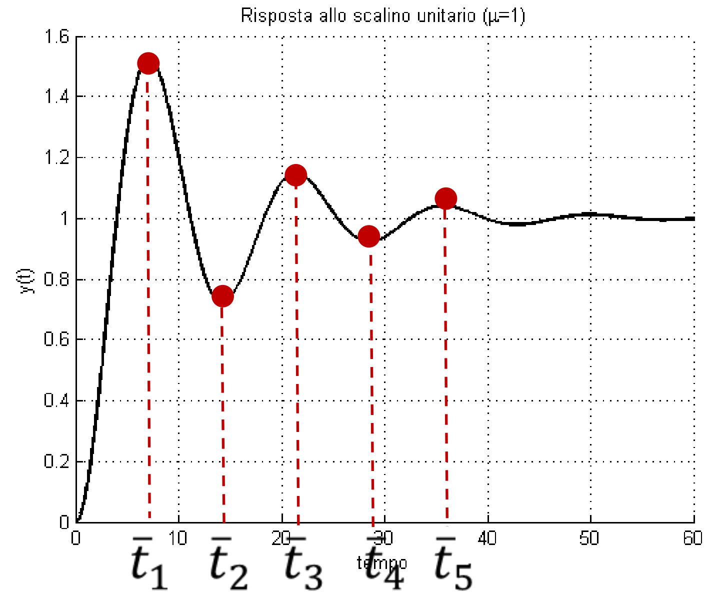
$$y(t) = \mu(1-\cos(\omega_n t))sca(t)$$

- I punti di stazionarietà $(\dot{y}(\bar{t}_k) = 0)$ di $y(t)$ sono

$$\bar{t}_k = \frac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

e i valori di $y(t)$ assunti in questi punti sono

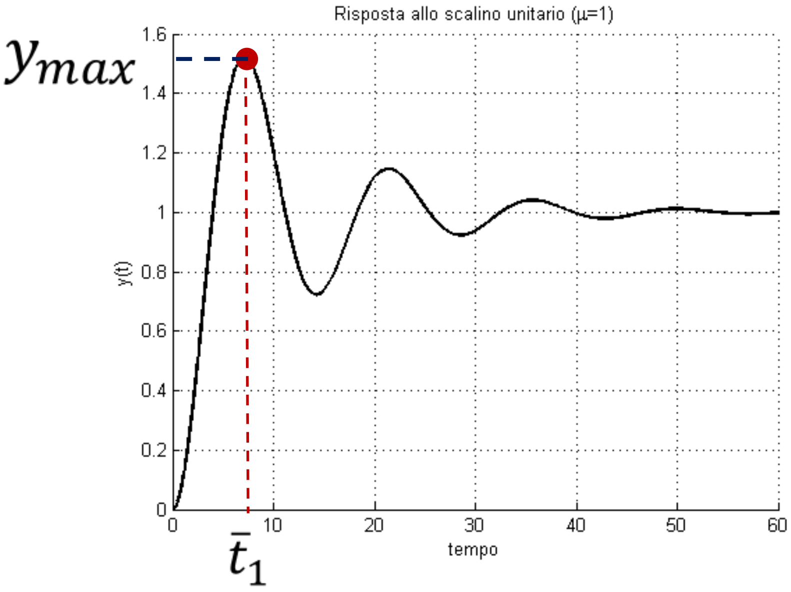
$$y(\bar{t}_k) = \mu\left(1-(-1)^k e^{-\xi\frac{k\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)$$

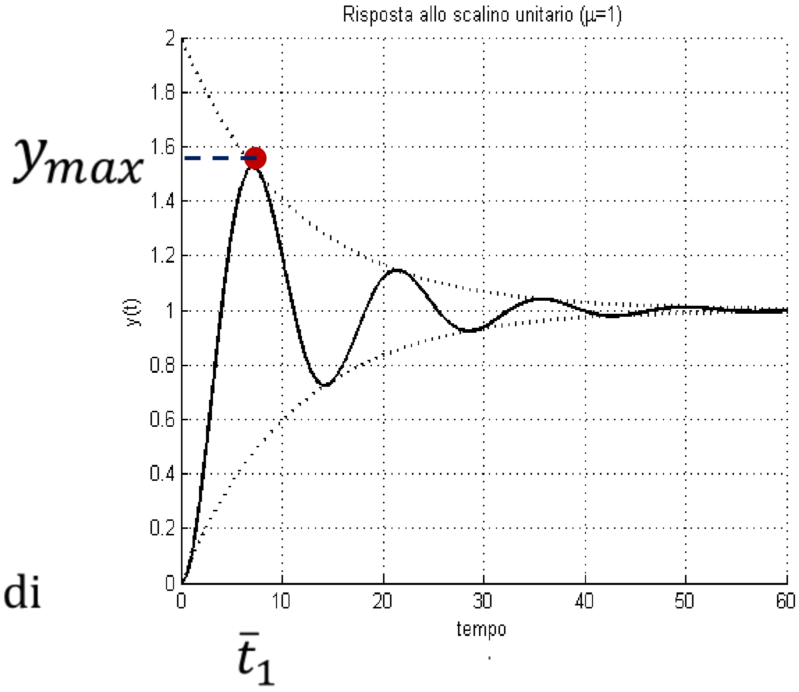


Sistemi del II ordine – poli complessi coniugati

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t + \arccos(\xi)\right)\right) sca(t)$$

- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $y_{max} = y(\bar{t}_1) = \mu\left(1 + e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)$
- $S\% = 100 e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ sovraelongazione massima percentuale





- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $y_{max} = y(\bar{t}_1) = \mu(1 + e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}})$
- $S\% = 100 e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ sovraelongazione massima percentuale
- E' facile fornire un'approssimazione del tempo di assestamento: i massimi e i minimi (punti stazionari) di $y(t)$ giacciono sulle funzioni:

$$y_M(t) = \mu(1 + e^{-\xi\omega_n t})$$
$$y_m(t) = \mu(1 - e^{-\xi\omega_n t})$$

per calcolare $T_{a\varepsilon}$ si calcolano gli istanti in cui queste funzioni «modulanti» entrano nella fascia $[\mu(1-0.01\varepsilon), \mu(1+0.01\varepsilon)]$, e si trova:

$$T_{a\varepsilon} = \frac{1}{\xi\omega_n}|\log(0.01\varepsilon)|$$

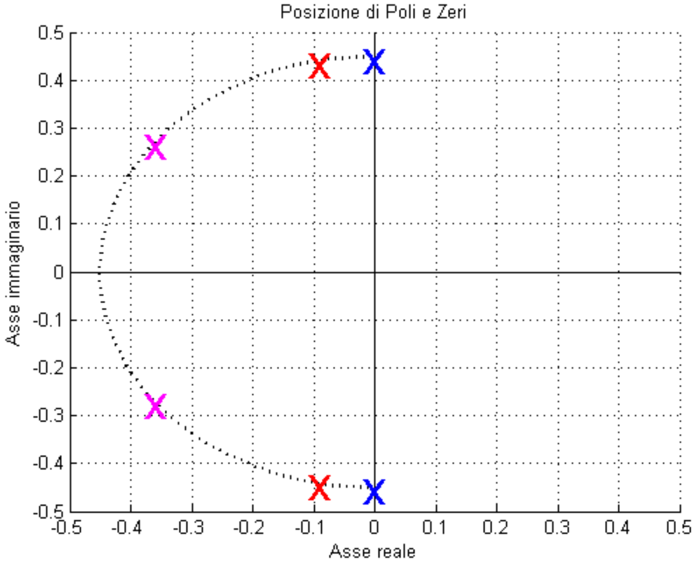
Sistemi del II ordine – poli complessi coniugati

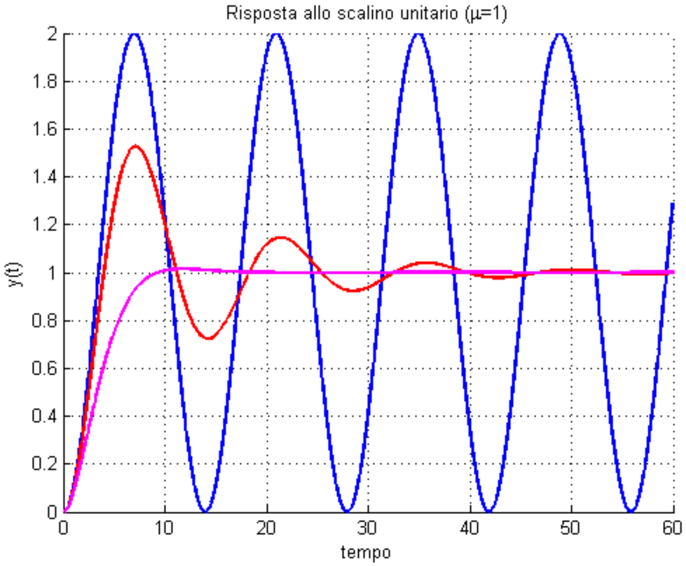
$$y(t) = \mu(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \arccos(\xi)))sca(t)$$

- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $y_{max} = y(\bar{t}_1) = \mu(1 + e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}})$
- $S\% = 100 e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ sovraelongazione massima percentuale
- $T_{a\varepsilon} = \frac{1}{\xi\omega_n}|\log(0.01\varepsilon)|$ tempo di assestamento
- $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ periodo di oscillazione

Sistemi del II ordine – poli complessi coniugati

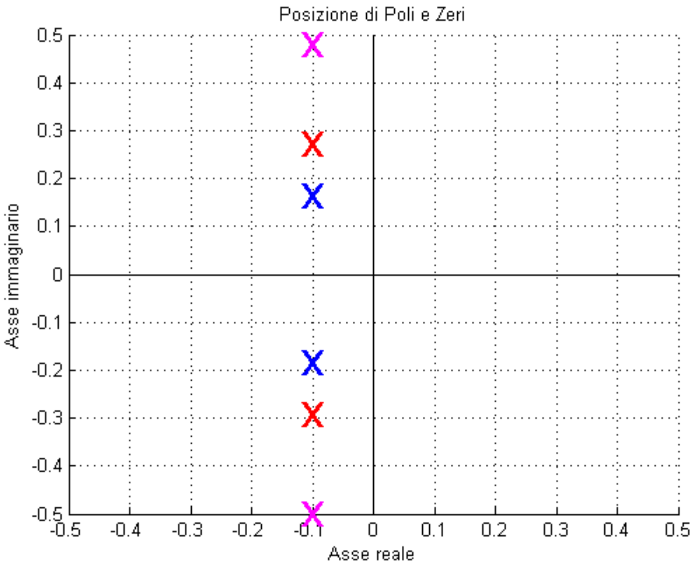
$$y(t) = \mu(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \arccos(\xi)))sca(t)$$

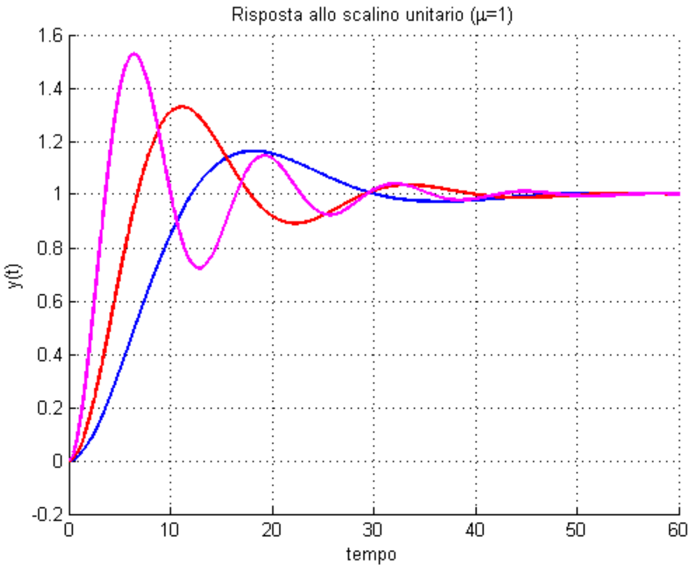




Sistemi del II ordine – poli complessi coniugati

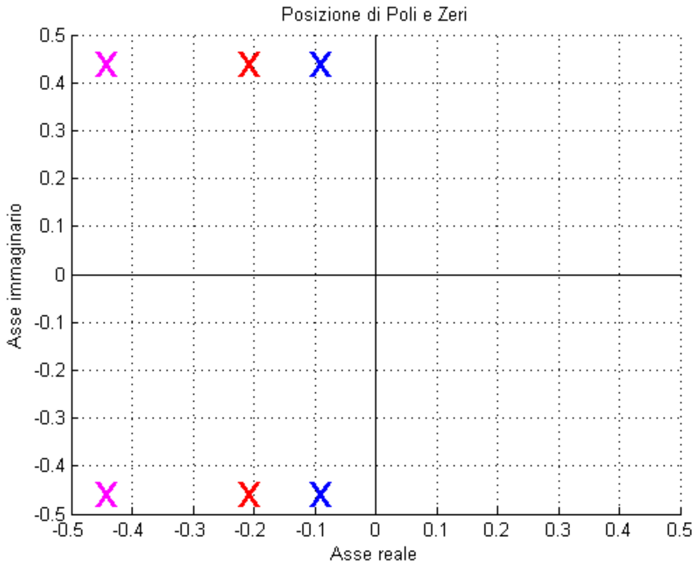
$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t + \arccos(\xi)\right)\right) sca(t)$$

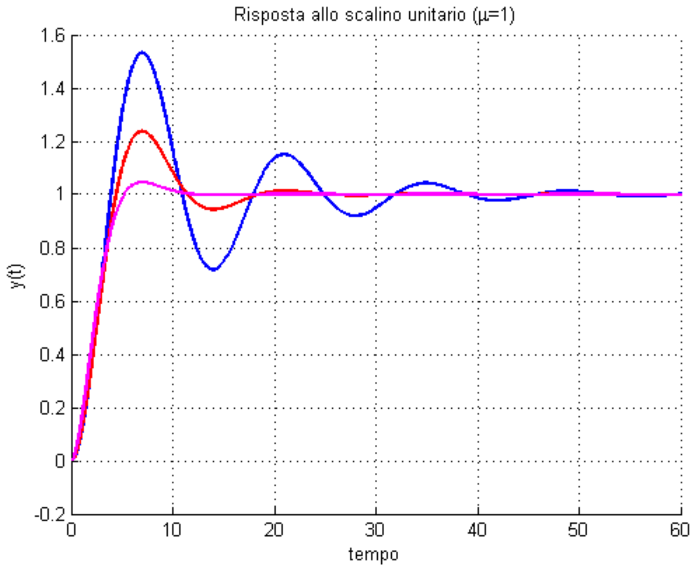




Sistemi del II ordine – poli complessi coniugati

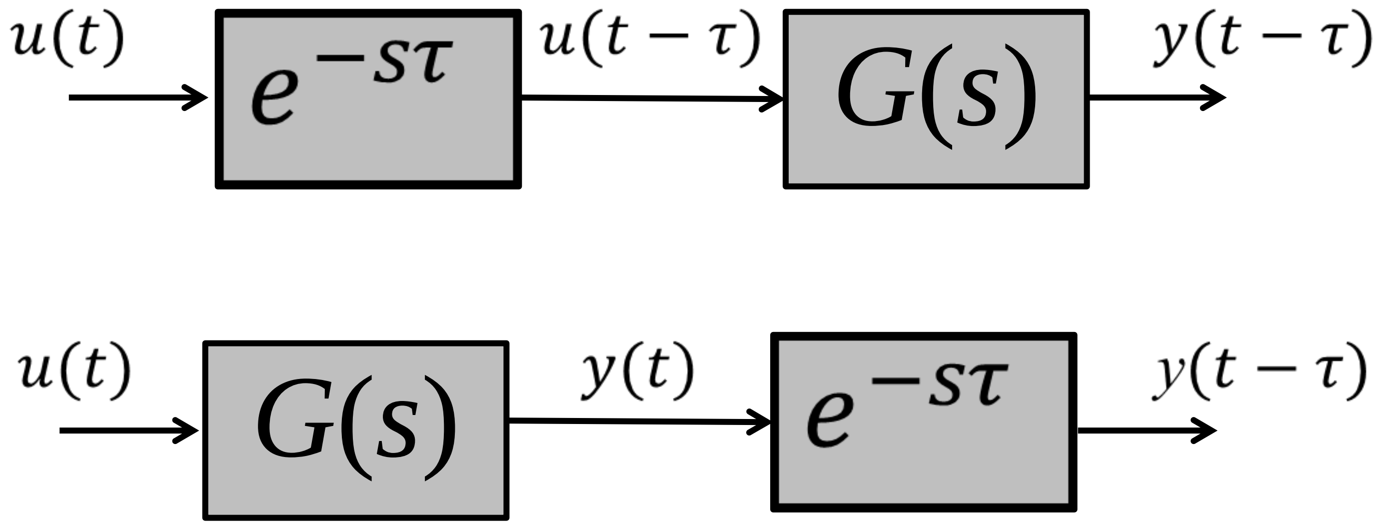
$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t + \arccos(\xi)\right)\right) sca(t)$$



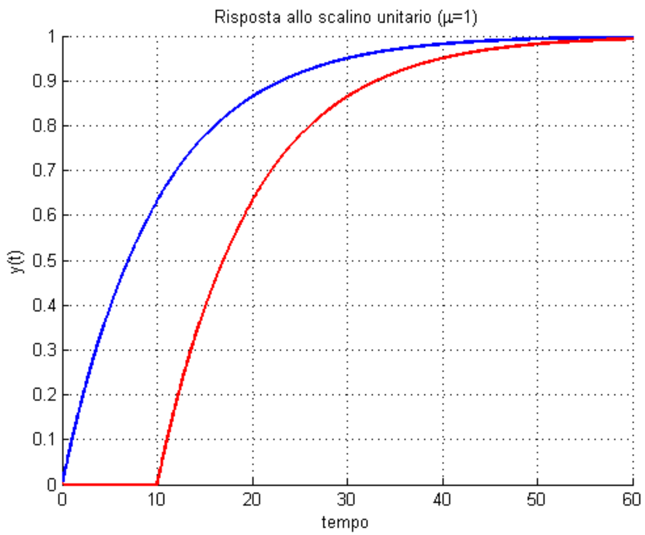


Sommario

- Struttura generale delle funzioni di trasferimento
- Caratteristichedella risposta allo scalino di principale interesse
- Risposte allo scalino
- Ritardo di tempo
- Approssimazione di sistemi di ordine superiore



La risposta è identica al caso in cui il ritardo è assente, tranne che l'istante iniziale della risposta è $t = \tau$ (invece di $t = 0$)



Sommario

- Struttura generale delle funzioni di trasferimento
- Caratteristichedella risposta allo scalino di principale interesse
- Risposte allo scalino
- Ritardo di tempo
- Approssimazione di sistemi di ordine superiore

ESEMPIO

Si è visto, per funzioni di trasferimento del tipo

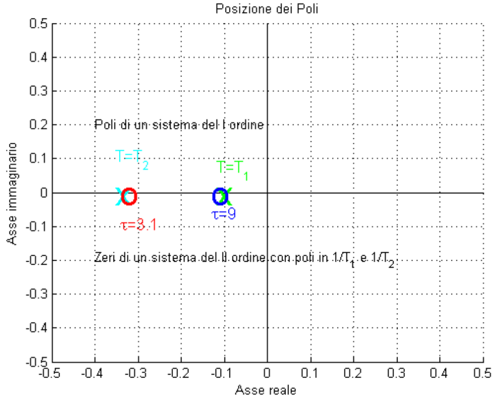
$$G(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

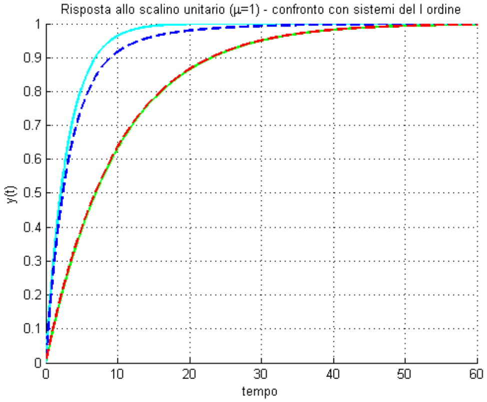
che, se $\tau \cong T_1$, la risposta è approssimabile a quella del sistema

$$G(s) = \frac{\mu}{1+T_2 s}$$

e che, se $\tau \cong T_2$, la risposta è approssimabile a quella del sistema

$$G(s) = \frac{\mu}{1+T_1 s}$$





- E’ stata svolta un’**approssimazione** consistente nella **cancellazione di uno zero e un polo con parte reale negativa** avente valori simili.

- Benchè sia un’approssimazione, l’effetto è trascurabile ai fini della risposta allo scalino (specialmente nel secondo caso)

REGOLA: qualora ci siano coppie polo-zero vicini tra loro nel piano complesso con parte reale negativa, è possibile forzare la cancellazione mantenendo invariati gli altri parametri (tra i quali il GUADAGNO) per ottenere un modello approssimato di ordine ridotto ma con caratteristiche simili a quello di partenza (almeno per quanto riguarda la risposta allo scalino).

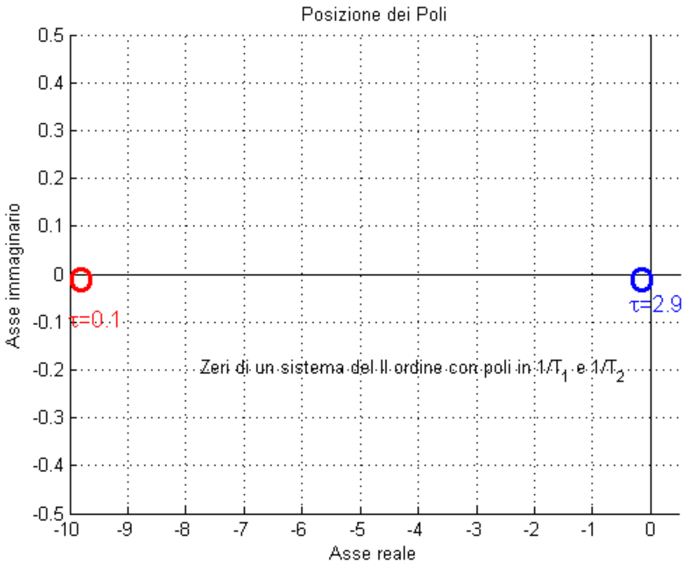
ESEMPIO 1

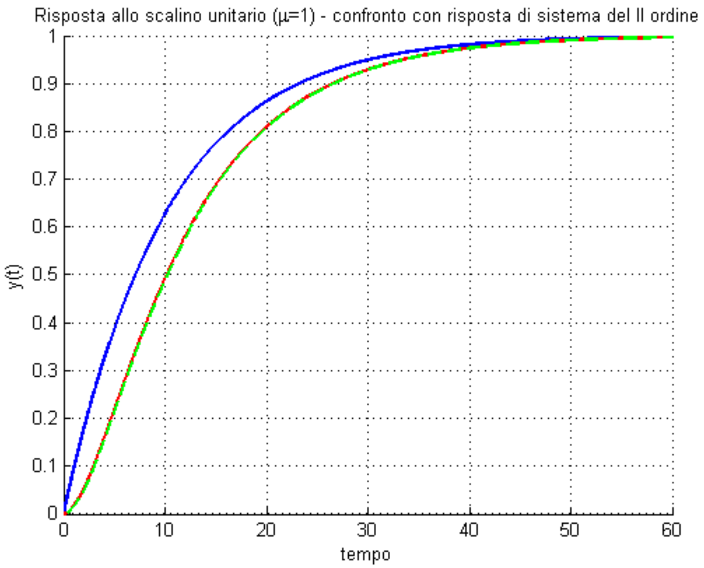
Si è visto, per funzioni di trasferimento del tipo

$$G(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

che, se $\tau \ll T_2$, la risposta è approssimabile a quella del sistema

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$





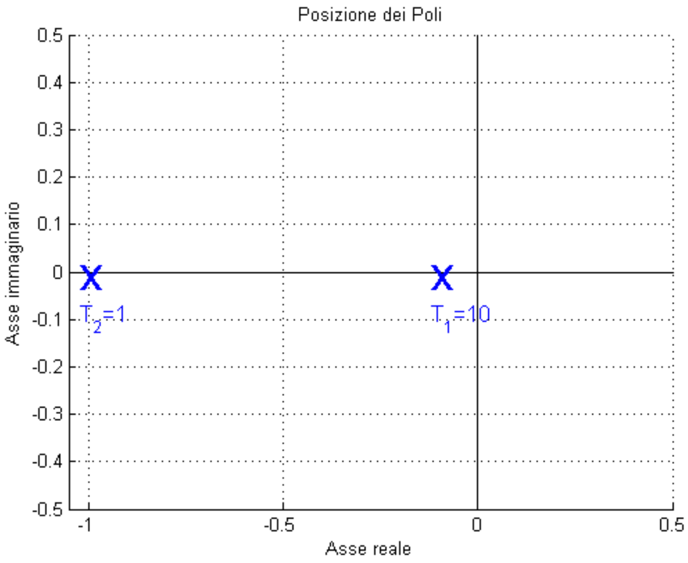
ESEMPIO 2

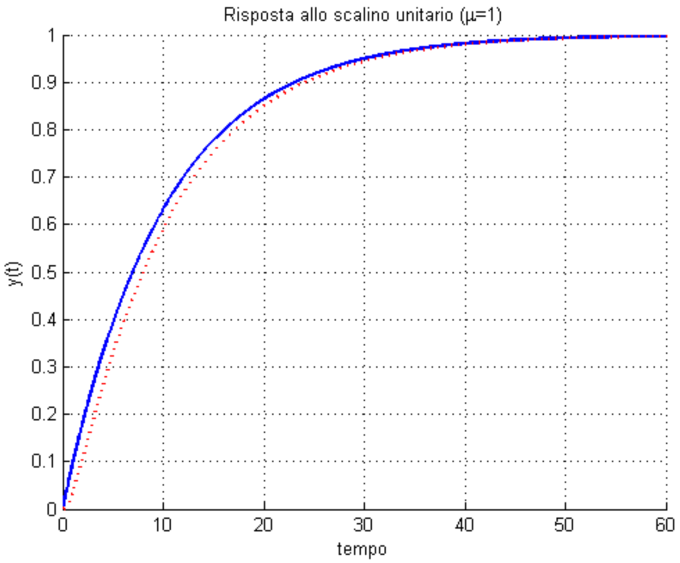
Si è visto, per funzioni di trasferimento del tipo

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

che, se $T_2 \ll T_1$, la risposta è approssimabile a quella del sistema

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)}$$





- Data $G(s)$ (dopo aver svolto le opportune cancellazioni polo-zero), **i poli dominanti sono i poli ($\in\mathbb{C}$) nettamente più vicini all'asse immaginario rispetto agli altri**.

REGOLA: la risposta allo scalino di un sistema con poli dominanti può essere approssimata con quella di un sistema con funzione di trasferimento avente soltanto il polo dominante e il guadagno pari a quello di partenza.
E' opportuno tener conto di zeri:

- che abbiano distanza dall'asse immaginario confrontabile o minore con quella dei poli dominanti
- che abbiano parte reale positiva

ESEMPIO

$$G(s)=\frac{-10(s+10)(s-8)}{(s+1)(s+100)(s+9)}=\frac{8}{9}\frac{(1+s/10)(1-s/8)}{(1+s)(1+s/100)(1+s/9)}$$

- **Poli**: $s=-1,-100,-9$ (sistema stabile!); costanti di tempo dei poli $T_i=1,\frac{1}{100},\frac{1}{9}$
- **Zeri**: $s=-10,8$ (parte reale positiva!); costanti di tempo degli zeri: $\tau_i=\frac{1}{10},-\frac{1}{8}$
- $\mu=\frac{8}{9}$: **guadagno** del sistema
- $\rho=-10$: **costante di trasferimento**
- g=0: **tipo** del sistema.

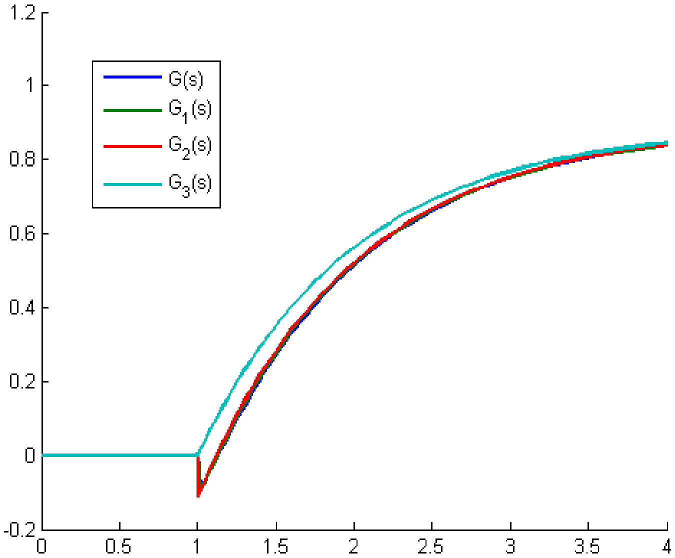
- cancellazioni polo/zero:

$$G_1(s)=\frac{8}{9}\frac{(1-s/8)}{(1+s)(1+s/100)}$$

- polo dominante:

$$G_2(s)=\frac{8}{9}\frac{(1-s/8)}{(1+s)}$$

- cancellazione non consigliata dello zero con parte reale positiva:



ESEMPIO

$$G(s)=\frac{-10(s+10)(s-8)}{(s+1)(s+100)(s+9)}=\frac{8}{9}\frac{(1+s/10)(1-s/8)}{(1+s)(1+s/100)(1+s/9)}$$

- **Poli**: $s=-1,-100,-9$ (sistema stabile!); costanti di tempo dei poli $T_i=1,\frac{1}{100},\frac{1}{9}$
- **Zeri**: $s=-10,8$ (parte reale positiva!); costanti di tempo degli zeri: $\tau_i=\frac{1}{10},-\frac{1}{8}$
- $\mu=\frac{8}{9}$: **guadagno** del sistema
- $\rho=-10$: **costante di trasferimento**
- g=0: **tipo** del sistema.

- cancellazioni polo/zero:

$$G_1(s)=\frac{8}{9}\frac{(1-s/8)}{(1+s)(1+s/100)}$$

- polo dominante:

$$G_2(s)=\frac{8}{9}\frac{(1-s/8)}{(1+s)}$$

- cancellazione non consigliata dello zero con parte reale positiva: