Corso di laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Guido Guardabassi

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

NOTE COMPLEMENTARI

LEZ. II : Sistemi

POLITECNICO DI MILANO

4. *Sistemi dinamici*

Il connotato qualificante di un sistema ***dinamico*** è che la conoscenza del valore assunto dall'ingresso (eventualmente vettoriale) u in un generico istante t (noto) non basta a determinare il valore che, in quell'istante, assumono le variabili dipendenti e in particolare l'uscita (eventualmente vettoriale) y.

Vediamo innanzitutto alcuni esempi.

***Esempio* 1**

Con riferimento al semplice circuito elettrico di Fig.4.1, si vuol descrivere il legame esistente fra la tensione v_1, presa come variabile indipendente (ingresso) e la tensione v_2, considerata come variabile d'uscita. Con le convenzioni di segno indicate in Fig.4.1, si ha:

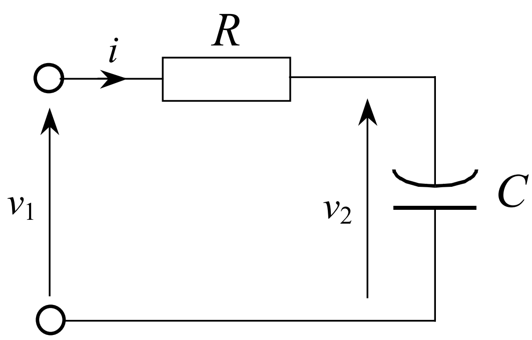

Fig. 4.1

$$v_1(t) - R\, i(t) - v_2(t) = 0$$

$$i(t) = C \frac{dv_2}{dt}(t)\ .$$

Quindi, il legame tra v_1 e v_2 è descritto da:

$$\frac{dv_2}{dt}(t) = \frac{1}{RC}\left(- v_2(t) + v_1(t)\right)$$

ovvero, con la notazione di Newton,

$$\dot{v}_2(t) = \frac{1}{RC}\left(- v_2(t) + v_1(t)\right)\ .$$

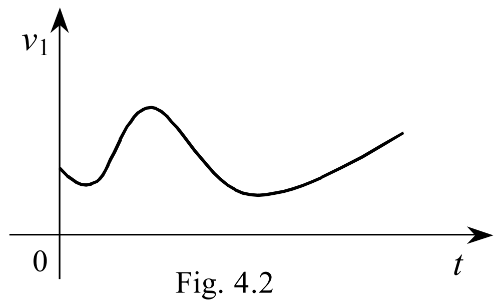

Fig. 4.2

Questa è un'equazione differenziale del prim'ordine, lineare, a coefficienti costanti, a proposito della quale ci poniamo la seguente domanda. Fissato un istante iniziale t_0, che supponiamo coincidere con l'origine dell'asse dei tempi ($t_0 = 0$), e dato l'andamento della variabile d'ingresso v_1 dall'istante iniziale in poi (Fig.4.2) è possibile determinare l'andamento da 0 in poi della variabile dipendente v_2?

La matematica ci dice che la risposta è no (perchè $v_2(t)$ risulti univocamente determinata per ogni $t > 0$, occorre conoscere qualcosa in più; ad esempio, il valore iniziale di v_2). Questa risposta è indicativa del fatto che quello in esame (costituito da un'unica equazione) è un *sistema dinamico*.

In un sistema dinamico, un insieme (un vettore) x di variabili dipendenti che goda della seguente fondamentale proprietà: la conoscenza di $x(0)$ e dell'andamento dell'ingresso da 0 in poi è sufficiente a determinare univocamente l'andamento, da 0 in poi, di tutte le variabili dipendenti, costituisce un insieme (un vettore) di ***variabili di stato***.

Con riferimento al sistema dell'esempio, possiamo dunque affermare che la tensione v_2 è, da sola, una variabile di stato (coincidente, in questo caso, con la variabile d'uscita). Ricordando che è consuetudine indicare con la lettera u l'ingresso e con la lettera y l'uscita, poniamo:

$u := v_1 \quad , \quad x := v_2 \quad , \quad y := v_2 = x$.

E' utile riconoscere che, con questa nuova notazione, il sistema di Fig.4.1 può essere posto nella forma seguente.

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) \\ \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

dove: $a := -\,1/RC := -\,b$. La prima equazione (differenziale, del prim'ordine) descrive come evolve lo stato del sistema, a partire dallo stato iniziale $x(0)$ e sotto l'azione, da 0 in poi, dell'ingresso u. Per questo essa è detta *equazione di stato*. La seconda equazione (algebrica) dice in che modo il valore dell'uscita all'istante t dipende dal valore assunto, sempre all'istante t, dallo stato (ed eventualmente dall'ingresso). Per questo è detta *equazione d'uscita*.

Il sistema S non è che un caso particolare di un sistema della forma:

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \qquad \textit{equazione di stato} \\ \\ y(t) = g(x(t)) & \qquad \textit{equazione d'uscita} \end{cases}$$

con $f(x, u) := a\,x + b\,u$ e $g(x) := x$. Vedremo nel seguito come, grazie alla notazione vettoriale, questa sia una descrizione comune ad una classe molto ampia di sistemi dinamici (*forma normale*); così ampia da comprendere (direttamente o indirettamente) quasi tutti i sistemi dinamici d'interesse corrente.

***Esempio* 2**

Si consideri un carrello su rotaie orizzontali (e rettilinee) spinto da una forza $\sigma(t)$. Sia M la massa del carrello (comprensiva dell'inerzia delle ruote e di tutte le altre eventuali masse in movimento ad esse collegate). Vogliamo descrivere in che modo la velocità v del carrello dipende dall'andamento della spinta σ ad esso applicata.

La cosiddetta "legge di Newton" (forza uguale a massa per accelerazione) ci porta a scrivere l'equazione seguente:

$$M\,\dot{v}(t) = \sigma(t) + \alpha(v(t))$$

dove con α si è indicata la forza (equivalente), in direzione longitudinale, che le rotaie esercitano sul carrello per attrito, e si è supposto che tale forza (d'attrito) dipenda essenzialmente, a parità di carico (cioè a M costante) dalla sola velocità del carrello. In primissima approssimazione, si può in qualche caso ritenere:

$$\alpha(v) = -A\,v \qquad , \qquad A > 0\ . \qquad\qquad (\textit{attrito viscoso})$$

L'equazione appena scritta è, ancora una volta, un'equazione differenziale del prim'ordine (lineare e a coefficienti costanti, nel caso di attrito viscoso). Questo significa che, dato l'andamento dell'ingresso σ da 0 in avanti, il calcolo dell'andamento di v da 0 in avanti non è ancora possibile. Occorre, ad esempio, conoscere anche il valore iniziale di v.

La velocità v è, dunque, da sola, una variabile di stato. Ricorrendo alla notazione consueta, poniamo:

$$u := \sigma \quad , \quad x := v \quad , \quad y := v = x\ .$$

Con questa notazione, il sistema che descrive il moto del carrello può essere facilmente posto in forma normale:

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t)) & \textit{equazione d'uscita} \end{cases}$$

dove :

$$f(x, u) := \frac{1}{M}\,(\alpha(x) + u)$$

$$g(x) := x\ .$$

Se $\alpha(x) = -A\,x$ (attrito viscoso), allora

$$f(x, u) := a\,x + b\,u \quad , \quad a := -\frac{A}{M} \quad , \quad b := \frac{1}{M}$$

anche f, cioè, oltre a g, è una funzione lineare e S è un sistema dinamico lineare.

***Esempio* 3**

La crescita di una specie in condizione di isolamento con risorse illimitate può essere descritta da un modello estremamente semplice. Indicando con x la biomassa di quella specie, è ragionevole supporre che la velocità di crescita sia proporzionale alla biomassa:

$$\dot{x}(t) = k\, x(t) \quad .$$

Il coefficiente costante k è detto tasso di crescita. Anche in questo caso, il sistema, privo di ingressi (non ci sono variabili indipendenti), è costituito da un'equazione differenziale del prim'ordine (lineare, a coefficienti costanti). Per risolverla, su un intervallo di tempo $[0, T]$, occorre tuttavia disporre di qualche informazione ulteriore; ad esempio, il valore iniziale di x che, come suggerisce la notazione, assume il ruolo di variabile di stato.

Un sistema privo d'ingressi si dice *libero*; se è anche tempo-invariante, si dice *autonomo*.

Più realisticamente si può supporre che le risorse (ad esempio quelle alimentari) siano limitate e che la disponibilità individuale diminuisca al crescere della popolazione (ipotesi malthusiana). Ciò comporta che il tasso di crescita non sia più costante, ma sia una funzione (decrescente) della biomassa; ad esempio:

$$\dot{x}(t) = k(x(t))\, x(t) \quad , \quad k(x) = k_0 - \alpha\, x \quad , \quad \alpha > 0 \quad .$$

Se la specie si presta alla coltivazione o all'allevamento e indichiamo con la lettera v l'intensità complessiva delle azioni esterne atte a favorirne la crescita (irrigazione, concimazione, spargimento di antiparassitari, nel caso di specie vegetale; alimentazione aggiuntiva ed opportunamente calibrata, nel caso di specie animale) mentre indichiamo con la lettera w l'intensità complessiva delle azioni di prelievo (ad esempio: taglio di alberi in un bosco o attività di caccia o di pesca) non potremo evidentemente ignorare che il tasso di crescita risente delle azioni suddette. Ad esempio, si può supporre che sia:

$$\dot{x}(t) = k(x(t), v(t), w(t))\, x(t) \quad , \quad k(x, v, w) = k_0 - \alpha\, x + \beta\, v - \gamma\, w \quad , \quad \alpha,\beta,\gamma > 0 \quad .$$

In questo caso, potremmo altresì considerare come variabile d'uscita il frutto dell'azione di prelievo, plausibilmente proporzionale al prodotto dell'intensità dell'azione per la biomassa:

$$y(t) = h\, w(t)\, x(t) \quad .$$

Siamo così pervenuti a un sistema dinamico in forma normale. Infatti ponendo:

$u := [u_1 \quad u_2]'$, $u_1 := v$, $u_2 := w$,

si può scrivere:

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & \textit{equazione d'uscita} \end{cases}$$

dove:

$f(x, u) := k(x, u_1, u_2)\, x$, $k(x, u_1, u_2) = k_0 - \alpha\, x + \beta\, u_1 - \gamma\, u_2$

$g(x, u) := h\, u_2\, x$.

Tutti gli esempi visti finora sono connotati dalla presenza di un'unica variabile di stato e, coerentemente, dalla presenza di un'unica equazione di stato (scalare). Il prossimo esempio presenta una situazione leggermente più complessa, tuttavia ancora riconducibile, come vedremo, all'ormai consueta forma normale.

***Esempio* 4**

Si considerino due specie libere in un ambiente isolato e si supponga che una di esse (diciamo la seconda) costituisca una risorsa alimentare per la prima. Si tratta, in altre parole, del classico rapporto preda-predatore. Indichiamo con x_1 e x_2, rispettivamente, la biomassa della specie predatrice e quella della specie predata. Supponiamo inoltre che la specie predatrice sia oggetto di prelievo con intensità u e consideriamo come variabile d'uscita il risultato di tale azione di prelievo; risultato che, come nell'Esempio 3, possiamo ritenere proporzionale al prodotto dell'intensità u per la biomassa x_1 presente nel sistema.

Sulla falsariga dell'esempio precedente, possiamo scrivere:

$$S: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = k_1(x_1(t), x_2(t), u(t))\, x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = k_2(x_1(t), x_2(t))\, x_2(t) \\ y(t) = h\, u(t)\, x_1(t) \end{cases}$$

dove :

$k_1(x_1, x_2, u) := k_{01} - \alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 - \beta\, u$

$k_2(x_1, x_2) := k_{02} - \alpha_{12}\, x_1 - \alpha_{22}\, x_2$

e tutti i coefficienti sono positivi.

Se ora poniamo: $x := [x_1 \quad x_2]'$,

$f_1(x, u) := k_1(x_1, x_2, u)\, x_1$

$f_2(x, u) := k_2(x_1, x_2)\, x_2$

$$f(x, u) := \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} \quad , \qquad g(x, u) := h\, u\, x_1$$

il sistema S può ancora essere posto nella forma:

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & \textit{equazione d'uscita} \end{cases} .$$

In questo caso, l'equazione di stato è un'equazione differenziale *vettoriale* del prim'ordine, mentre l'equazione d'uscita è, come sempre, un'equazione algebrica. Per risolvere l'equazione di stato su un assegnato intervallo di tempo $[0, T]$ - affinché sia possibile, cioè, determinare $x(t)$ per ogni $t \in [0, T]$ - non è sufficiente conoscere l'andamento dell'ingresso u su $[0, T]$. Occorre, ad esempio, conoscere anche il valore iniziale di x; vale a dire: $x_1(0)$ e $x_2(0)$. Come ormai sappiamo, è questa proprietà che conferisce agli elementi del vettore x il carattere di variabili di stato.

Si chiama *ordine* di un sistema dinamico il numero delle sue variabili di stato (scalari), cioè il numero di elementi del vettore di stato, o anche, equivalentemente, il numero di "dimensioni" dello spazio di stato. L'ordine del sistema S non va confuso con l'ordine della sua equazione differenziale vettoriale di stato.

Il sistema preda-predatore che abbiamo appena ricavato è dunque un sistema dinamico del second'ordine. Poiché le funzioni f e g che lo descrivono sono non lineari e non dipendono dal tempo, il sistema è non lineare e tempo-invariante.

***Esempio* 5**

Con riferimento al circuito di Fig.4.3, si vuol descrivere il legame fra la tensione v_1, presa come variabile d'ingresso e la tensione v_2, considerata come variabile d'uscita.

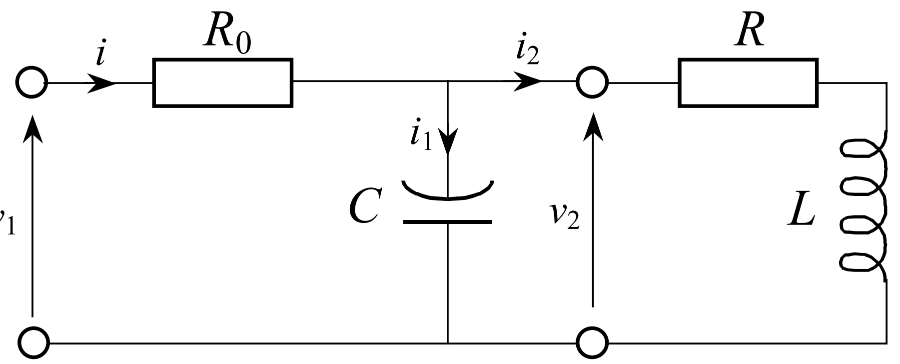

Fig. 4.3

Le "leggi" (o "principi") di Ohm e di Kirchhoff, opportunamente combinati, consentono di scrivere:

$$S: \quad \begin{cases} v_1(t) - R_0\, i(t) - v_2(t) = 0 \\ i(t) - i_1(t) - i_2(t) = 0 \\ i_1(t) = C \dfrac{dv_2}{dt}(t) \\ v_2(t) - R\, i_2(t) - L \dfrac{di_2}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione di S, ricaviamo:

$$i(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} \quad ;$$

dalla seconda (e dalla terza):

$$i_2(t) = i(t) - i_1(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} - C \frac{dv_2}{dt}(t) \quad ;$$

quindi,

$$\frac{di_2}{dt}(t) = \frac{1}{R_0}\left[\frac{dv_1}{dt}(t) - \frac{dv_2}{dt}(t)\right] - C \frac{d^2 v_2}{dt^2}(t) \quad .$$

Sostituendo nell'ultima equazione di S, si ottiene:

$$v_2(t) - R\left[\frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} - C\frac{dv_2}{dt}(t)\right] - L\left[\frac{1}{R_0}\left[\frac{dv_1}{dt}(t) - \frac{dv_2}{dt}(t)\right] - C\frac{d^2v_2}{dt^2}(t)\right] = 0$$

Questa è un'equazione differenziale del second'ordine (lineare, a coefficienti costanti) nell'incognita v_2 (la variabile che abbiamo deciso di considerare come variabile d'uscita), nella quale, oltre a v_2 e a un certo numero di sue derivate, compare soltanto la variabile d'ingresso v_1 e un certo numero di sue derivate. Essa rappresenta il sistema dinamico S, descrivendo direttamente il legame fra le sue variabili d'ingresso e d'uscita. Coerentemente, si dice che tale equazione costituisce una descrizione di S in *forma ingresso-uscita*.

Per mettere meglio in evidenza questo aspetto, poniamo come di consueto:

$$u := v_1 \quad , \quad y := v_2$$

e riscriviamo, ordinandone i termini e con la notazione di Newton, l'equazione differenziale che abbiamo appena ricavato:

$$S: \quad L\,C\;\ddot{y}(t) + \left[\frac{L}{R_0} + R\,C\right]\dot{y}(t) + \left[1 + \frac{R}{R_0}\right]y(t) = \frac{L}{R_0}\,\dot{u}(t) + \frac{R}{R_0}\,u(t) \quad .$$

Per risolvere su un assegnato intervallo di tempo $[0, T]$ un'equazione di questo tipo, non è sufficiente conoscere l'andamento dell'ingresso u su $[0, T]$. Occorre, ad esempio, conoscere anche il valore iniziale di y e di $\dot{y}$. Questo suggerisce che S possa essere alternativamente descritto mediante due variabili di stato scalari e che quindi l'ordine di S non possa essere inferiore all'ordine dell'unica equazione differenziale *scalare* che ne costituisce una descrizione in forma ingresso-uscita.

Per esaminare meglio la non banale questione della relazione intercorrente fra le possibili descrizioni di S in forma normale e quelle in forma ingresso-uscita, chiediamoci innanzitutto se sia possibile, nel caso del circuito di Fig.4.3, porre S in forma normale. Per questo, ritorniamo a:

$$S: \quad \begin{cases} v_1(t) - R_0\, i(t) - v_2(t) = 0 \\ i(t) - i_1(t) - i_2(t) = 0 \\ i_1(t) = C\dfrac{dv_2}{dt}(t) \\ v_2(t) - R\, i_2(t) - L\dfrac{di_2}{dt}(t) = 0 \quad . \end{cases}$$

Dalla prima equazione avevamo già ricavato:

$$i(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} \quad ;$$

dalla seconda, abbiamo:

$$i_1(t) = i(t) - i_2(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} - i_2(t) \quad .$$

Sostituendo, la terza e la quarta equazione possono essere riscritte nel modo seguente :

$$\frac{dv_2}{dt}(t) = \frac{1}{C}\left[\frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} - i_2(t)\right]$$

$$\frac{di_2}{dt}(t) = \frac{1}{L}\,[v_2(t) - R\, i_2(t)] \quad .$$

Queste sono due equazioni differenziali scalari (lineari e a coefficienti costanti) del prim'ordine nelle incognite v_2 e i_2. Oltre a v_2 e a i_2, nelle due equazioni compare soltanto la variabile d'ingresso v_1. Tutto ciò suggerisce che v_2 e i_2 possano costituire un insieme di variabili di stato di S e che quelle appena scritte siano le corrispondenti equazioni di stato (scalari).

Seguendo la consuetudine, poniamo:

$$u := v_1 \quad , \quad y := v_2 \quad , \quad x_1 := v_2 \quad , \quad x_2 := i_2$$

e riscriviamo il sistema S nella forma seguente:

$$S : \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{1}{C\,R_0}\, x_1(t) - \dfrac{1}{C}\, x_2(t) + \dfrac{1}{C\,R_0}\, u(t) \\[2ex] \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{L}\, x_1(t) - \dfrac{R}{L}\, x_2(t) \\[2ex] y(t) = x_1(t) \quad . \end{cases}$$

Se ora introduciamo il vettore di stato $x := [x_1 \quad x_2]'$, e definiamo:

$$A := \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{C\,R_0} & -\dfrac{1}{C} \\ \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix} \quad , \qquad B := \begin{pmatrix} \dfrac{1}{C\,R_0} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \; ,$$

e poi:

$f(x, u) := A\,x + B\,u$

$g(x) := C\,x$

è facile verificare che si è pervenuti a una descrizione di S in forma normale:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ \\ y(t) = g(x(t)) & \textit{equazione d'uscita} \; . \end{cases}$$

Più precisamente, si può concludere che S è un sistema

- dinamico *in senso proprio*, o *in senso stretto*, perchè l'uscita non dipende direttamente dall'ingresso,
- del second'ordine, perchè ha due variabili di stato scalari (x_1 e x_2),
- lineare, perchè f e g sono funzioni lineari di x e di u,
- tempo-invariante, perchè le matrici A, B e C sono costanti.

Quando, come nel caso degli Esempi 3 e 4, l'uscita dipende direttamente dall'ingresso, il sistema non è propriamente, o strettamente, dinamico; in questo caso, è anche detto dinamico in senso improprio.

In generale, stabilire le relazioni che intercorrono fra forme normali e forme ingresso-uscita di un sistema dinamico non è semplice. Solo nel caso lineare è disponibile una teoria compiuta che consente di ricavare agevolmente, in ogni circostanza, la forma più conveniente per affrontare il particolare problema che si vuole risolvere. Alcuni aspetti di questa teoria verranno richiamati nei capitoli successivi.

Il prossimo paragrafo è dedicato alle importanti nozioni di *equilibrio* e di *modello lineare tangente* a un sistema dinamico in una condizione di equilibrio.

5. *Movimento e risposta. I sistemi lineari*

Con riferimento alla forma normale, che consente di descrivere una classe molto ampia di sistemi dinamici, notiamo che l'equazione d'uscita è relativamente banale a fronte dell'equazione di stato: un'equazione differenziale, vettoriale, del prim'ordine.

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & \textit{equazione d'uscita} \end{cases} .$$

Fissando l'attenzione su un intervallo di tempo $[0, T]$, abbiamo già osservato che la soluzione dell'equazione di stato al generico istante t (che supporremo sempre esistere ed essere unica) dipende dall'andamento dell'ingresso u sull'intervallo $(0, t)$ e dallo stato iniziale $x(0)$. Questo fatto può essere espresso in modo formale scrivendo:

$$x(t) = \varphi(t; x(0), u_{(0,\, t)}(\cdot)) \quad .$$

In altre parole, una volta fissato lo stato iniziale e l'andamento di u da 0 in poi, resta fisstao l'andamento di x da 0 in poi. Diremo che tale andamento è il ***movimento*** *dello stato di S prodotto dallo stato iniziale* $x(0)$ *e dall'andamento dell'ingresso u da* 0 *in poi*. Quindi, i movimenti di S sono tanti quanti sono i possibili valori dello stato iniziale e i possibili andamenti dell'ingresso.

In generale, la funzione φ, cioè la soluzione dell'equazione di stato, può essere calcolata numericamente, ma solo in casi estremamente particolari ammette una formulazione esplicita nota. Una notevolissima eccezione a questo stato di cose è rappresentato dai sistemi lineari.

Consideriamo innanzitutto il caso scalare:

$$\dot{x}(t) = a\, x(t) + b\, u(t) \,.$$

e chiediamoci qual è il movimento prodotto dal valore iniziale di x e dall'andamento dell'ingresso u da 0 in poi. E' facile verificare che

$$x(t) = exp(a\, t)\, x(0) + \int_0^t exp(a\, (t - \tau))\, b\, u(\tau)\, d\tau$$

è la soluzione cercata (infatti soddisfa l'equazione differenziale e la condizione iniziale). Questa è, dunque, in questo caso, la forma della funzione φ.

Se passiamo a considerare l'equazione di stato di un sistema lineare di ordine n maggiore di uno, vale a dire:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\ .$$

con A e B matrici reali di dimensioni opportune, le cose non sono più così semplici. Tuttavia, è possibile dimostrare che, anche in questo caso:

$$x(t) = exp(A\,t)\,x(0) + \int_0^t exp(A\,(t-\tau))\,B\,u(\tau)\,d\tau$$

dove la relativa "stranezza" è costituita dall'esponenziale di matrice. Se M è una matrice quadrata qualsiasi, che cosa s'intende per $exp(M)$?

Ricordiamo che, per ogni m reale (sviluppo in serie di McLaurin o di Taylor attorno all'origine),

$$exp(m) = 1 + m + \frac{1}{2}m^2 + \ldots + \frac{1}{k!}m^k + \ldots\quad .$$

Analogamente,

$$exp(M) := I + M + \frac{1}{2}M^2 + \ldots + \frac{1}{k!}M^k + \ldots\quad .$$

La suddetta espressione generale del movimento di un sistema lineare prodotto da un particolare stato iniziale e da un particolare andamento dell'ingresso va sotto il nome di *formula di Lagrange*, in omaggio al celebre matematico torinese che ne fu l'autore.

Essa mette in evidenza come i contributi delle due distinte cause di movimento: lo stato iniziale e l'ingresso, siano distinti e additivi. Infatti, il movimento $x(t)$ è somma di due contributi: uno, dovuto esclusivamente allo stato iniziale, è detto *movimento libero*, l'altro, dovuto esclusivamente all'ingresso, è detto *movimento forzato* (da u):

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)\ ,\quad x_l(t) = exp(A\,t)\,x(0)\ ,\quad x_f(t) = \int_0^t exp(A\,(t-\tau))\,B\,u(\tau)\,d\tau\ .$$

Quella appena descritta è una delle possibili formulazioni del ***principio di sovrapposizione degli effetti*** applicato al caso dei sistemi dinamici lineari.

Il principio di sovrapposizione degli effetti può essere ulteriormente articolato se, nella composizione della variabile d'ingresso, sono riconoscibili varie componenti additive. Ad esempio, se $u = u_1 + u_2$, è immediato dedurre che

$$x_f(t) = \int_0^t exp(A\ (t - \tau))\ B\ (u_1(\tau) + u_2(\tau))\ d\tau =$$

$$= \int_0^t exp(A\ (t - \tau))\ B\ u_1(\tau)\ d\tau + \int_0^t exp(A\ (t - \tau))\ B\ u_2(\tau)\ d\tau := x_{f1}(t) + x_{f2}(t)\ ;$$

dimostrare, cioè, che il movimento forzato da u è, a sua volta, scomponibile in due contributi distinti: uno dovuto esclusivamente a u_1, l'altro dovuto esclusivamente a u_2.

Ad ogni movimento di S (specificato da uno stato iniziale e da un andamento delle variabili d'ingresso) è associato un andamento delle variabili d'uscita che chiamiamo ***risposta** di S* (*a quello stato iniziale e a quell'andamento dell'ingresso*, che assumono la funzione di "stimoli").

Nel caso lineare, l'equazione d'uscita ha la forma:

$$y(t) = C\ x(t) + D\ u(t)\ ;$$

quindi,

$$y(t) = C\ exp(A\ t)\ x(0) + C \int_0^t exp(A\ (t - \tau))\ B\ u(\tau)\ d\tau + D\ u(t)\ .$$

Una breve riflessione consente di concludere che il principio di sovrapposizione degli effetti è applicabile ad ogni risposta, esattamente come ad ogni movimento, di un sistema dinamico lineare.

5. *Equilibrio e modello lineare tangente*

Genericamente, un sistema dinamico S è in una condizione di equilibrio se tutte le sue variabili hanno un andamento costante.

Con riferimento ad un sistema dinamico S in forma normale,

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & \textit{equazione d'uscita}\ . \end{cases}$$

si può essere più precisi. Sia $u(t) = \bar{u}$ un ingresso costante. Si chiama *stato di equilibrio* di S corrispondente a $\bar{u}$ qualunque soluzione costante ($\dot{x}(t) = 0$) dell'equazione di stato; qualunque soluzione, cioè, dell'equazione (algebrica):

$$f(x, \bar{u}) = 0 \ .$$

Si noti che, fissato l'ingresso costante $\bar{u}$, gli andamenti possibili di x in S sono ancora tanti quanti sono i suoi possibili valori iniziali: cioè, infiniti; e generalmente si tratta di andamenti non costanti. Gli stati di equilibrio di S corrispondenti a $\bar{u}$ sono dunque quei particolari valori dello stato iniziale, a partire dai quali, sotto l'azione dell'ingresso costante $\bar{u}$, lo stato di S resta immobile.

Se $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio di S corrispondente a $\bar{u}$, il valore costante conseguentemente assunto dall'uscita y è ovviamente dato da:

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \ .$$

La terna $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$ descrive, nel suo complesso, una *condizione* di equilibrio di S.

Ora possiamo chiederci se sia possibile definire il *modello lineare tangente a S in una condizione di equilibrio* e se tale oggetto (qualora esista) conservi le proprietà e il significato che l'oggetto omologo aveva nel caso di sistemi non dinamici. Seguendo la medesima linea di ragionamento, possiamo sviluppare le funzioni f e g in serie di Taylor e troncare le serie ai termini di primo grado:

$$f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta u + \dots$$

$$g(x, u) = g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta x + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta u + \dots$$

dove si è posto: $\delta u := u - \bar{u}$ e $\delta x := x - \bar{x}$. Ma, per definizione di stato di equilibrio, sappiamo che $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, mentre $g(x, u) - g(\bar{x}, \bar{u}) = y - \bar{y} := \delta y$.

Quindi, se in $(\bar{x}, \bar{u})$ le derivate di f e di g di ordine superiore al primo non assumono valori eccessivamente elevati e se δx e δu sono abbastanza piccoli (non ci si scosta troppo, cioè, dalla condizione di equilibrio considerata), si può ritenere:

$$f(x, u) \cong \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta u$$

$$\delta y \cong \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta x + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta u \ .$$

Per altro, è evidente che la derivata rispetto al tempo di $\delta x(t) := x(t) - \bar{x}$ coincide con $\dot{x}(t)$ ed è quindi uguale a $f(x(t), u(t))$. In conclusione, il modello lineare δS tangente a S nella condizione di equilibrio $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$ è dato da:

$$\delta S : \quad \begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\ \delta x(t) + B\ \delta u(t) \\ \delta y(t) = C\ \delta x(t) + D\ \delta u(t) \end{cases}$$

dove:

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \qquad , \qquad B := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})$$

$$C := \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \qquad , \qquad C := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \ .$$

Esempio

Si consideri il sistema

$$S : \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\ ln\ x_1(t) + 2\ x_2(t) + u^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = ln\ x_1(t) + u(t) - x_2(t) \\ y(t) = exp\ x_2(t) - ln\ x_1(t) \end{cases}$$

e si determini il modello lineare δS tangente a S in una condizione di equilibrio prodotta dall'ingresso costante $\bar{u} = -1$.

Determiniamo innanzitutto (se possibile) uno stato di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\bar{u} = -1$.

Per far ciò, dobbiamo risolvere rispetto alle incognite x_1 e x_2 le equazioni

$$\begin{cases} -\ ln\ x_1 + 2\ x_2 + 1 = 0 \\ ln\ x_1 - 1 - x_2 = 0\ . \end{cases}$$

Dalla prima si ha: $ln\ x_1 = 2\ x_2 + 1$; sostituendo nella seconda, si ottiene:

$$2\ x_2 + 1 - 1 - x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x}_2 = 0\ ;$$

quindi

$ln\, x_1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x}_1 = e$.

Come corrispondente valore dell'uscita si ha:

$\bar{y} = exp\, \bar{x}_2 - ln\, \bar{x}_1 = 1 - 1 = 0$.

Quindi, una condizione di equilibrio di S prodotta dall'ingresso costante $\bar{u}$ = -1 esiste, è unica, ed è data da $(\bar{u}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}) = (-1, e, 0, 0)$.

Quanto a δS, sappiamo che:

$$\delta S: \qquad \begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\, \delta x(t) + B\, \delta u(t) \\ \\ \delta y(t) = C\, \delta x(t) + D\, \delta u(t) \end{cases}$$

dove:

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \qquad , \qquad B := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})$$

$$C := \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \qquad , \qquad C := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \ .$$

Per calcolare le matrici A, B, C e D dobbiamo quindi fare riferimento alla descrizione di S in forma vettoriale. Precisamente, poniamo:

$$f(x, u) := \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ \\ f_2(x, u) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\, ln\, x_1 + 2\, x_2 + u^2 \\ \\ ln\, x_1 + u - x_2 \end{pmatrix} \qquad , \qquad g(x, u) := exp\, x_2 - ln\, x_1$$

Pertanto:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, u) = -\frac{1}{x_1} \qquad \Rightarrow \qquad A_{11} := \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}, \bar{u}) = -\, 1/e$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x, u) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad A_{12} := \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}, \bar{u}) = 2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x, u) = \frac{1}{x_1} \qquad \Rightarrow \qquad A_{21} := \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}, \bar{u}) = 1/e$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x, u) = -\, 1 \qquad \Rightarrow \qquad A_{12} := \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}, \bar{u}) = -\, 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(x, u) = 2\,u \qquad \Rightarrow \qquad B_1 := \frac{\partial f_1}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) = -\,2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u}(x, u) = \;1 \qquad \Rightarrow \qquad B_2 := \frac{\partial f_2}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x, u) = -\,\frac{1}{x_1} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 := \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}, \bar{u}) = -\,1/e$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x, u) = exp\; x_2 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 := \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}, \bar{u}) = 1$$

Poiché S è dinamico in senso stretto, $\frac{\partial g}{\partial u}(x, u) = 0$; in conclusione:

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(\,\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -1/\bar{x}_1 & 2 \\ 1/\bar{x}_1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/e & 2 \\ 1/e & -1 \end{bmatrix},$$

$$B := \frac{\partial f}{\partial u}(\,\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 2\,\bar{u} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \frac{\partial g}{\partial x}(\,\bar{x}, \bar{u}) = [\; -\,1/\,\bar{x}_1 \quad exp(\bar{x}_2)] = [\; -1/e \quad 1\;]\,, \qquad D := \frac{\partial g}{\partial u}(\,\bar{x}, \bar{u}) = 0\;.$$

6. *Sommario e conclusione*

Un’ampia classe di sistemi ***non dinamici*** tempo-invarianti può essere descritta da una coppia di *equazioni vettoriali* del tipo:

$$S: \qquad \begin{cases} f(z(t), u(t)) = 0 \\ \\ y(t) = g(z(t), u(t)) \end{cases}$$

dove u e y sono i vettori d’ingresso e d’uscita, mentre z è un generico vettore di variabili dipendenti, della stessa dimensione del vettore f. Ricavando $z(t)$ in funzione di $u(t)$ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, si ottiene la *caratteristica ingresso-uscita* di S. Spesso gli elementi di y sono semplicemente un sottoinsieme degli elementi di z ($g(z, u) = [I \;\; O]\, z$).

Un'ampia classe di sistemi ***dinamici*** tempo-invarianti può essere descritta da una coppia di *equazioni vettoriali* del tipo:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \qquad \textit{equazione di stato} \\ \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & \qquad \textit{equazione d'uscita} \;\; . \end{cases}$$

Il vettore x è detto di stato. L'*ordine* di S è la dimensione di x, che ovviamente coincide con quella di f. Se u non compare nell'equazione d'uscita, S è *dinamico in senso stretto*, o anche *in senso proprio*. Questa rappresentazione del sistema S è detta *forma normale*. La forma normale non è l'unica forma di rappresentazione di un sistema dinamico; esiste, in generale, un'infinità di forme alternative, generalmente ad essa riconducibili. Il sistema S è in *forma ingresso-uscita* se, nelle equazioni che lo descrivono, compaiono soltanto variabili d'ingresso, d'uscita e loro derivate.

Lo stato iniziale e l'andamento dell'ingresso determinano un *movimento* (dello stato) di S e, contestualmente, una *risposta* dell'uscita.

Il sistema S, dinamico o non dinamico, è *lineare* se le funzioni f e g che lo descrivono sono lineari; cioè se esistono matrici A, B, C, D, di dimensioni opportune, tali che:

$$f(x, u) := A\, x + B\, u$$

$$g(x, u) := C\, x + D\, u \;\; .$$

Un'importante proprietà dei sistemi lineari è il *principio di sovrapposizione degli effetti*: ogni stimolo produce un effetto e gli effetti si sommano quando gli stimoli sono compresenti.

In vicinanza di un *punto di lavoro* costante (se S è non dinamico), o di una *condizione di equilibrio* (se S è dinamico), il comportamento di un sistema non lineare sufficientemente regolare può essere descritto con buona approssimazione da un sistema lineare tempo-invariante detto *modello lineare tangente a S nel punto di lavoro*, *o nella condizione di equilibrio*.