INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME E SOLUZIONI

Primo compitino – 26 aprile 2012

Anno Accademico 2011/2012

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) + \beta \cos(x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2^3(t) + \gamma x_2(t) + 2u^2(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

dove $\alpha \neq 0, \beta, \gamma$ sono parametri costanti reali.

1.1. Si indichi, giustificando brevemente le risposte, se il sistema

a) è dinamico: *sì, perché il valore assunto dalle variabili di stato nel tempo non dipende unicamente dai valori assunti dalla variabile di ingresso, ma anche dalle condizioni iniziali.*

b) è lineare: *no, perché le funzioni che compaiono nel sistema sono non lineari.*

c) è strettamente proprio: *sì, perché la funzione di uscita non dipende dall'ingresso.*

d) è tempo-variante: *no, perché le funzioni non variano nel tempo.*

e) ha ordine 3: *no, il numero di variabili di stato (l'ordine) è n=2.*

f) è SISO: *sì, perché sono presenti una sola variabile di ingresso e una sola variabile di uscita.*

1.2. Determinare le condizioni di equilibrio (per le variabili di stato e di uscita) associate all'ingresso costante $u(t)=0$ $\forall t$ al variare dei parametri α, β, γ.

Si indichino i valori delle variabili di stato in una generica condizione d'equilibrio come $\bar{x}_1, \bar{x}_2$. Le equazioni del sistema all'equilibrio si ottengono ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ e $u(t)=0$:

$$\alpha \bar{x}_1 + \beta \cos(\bar{x}_2) = 0$$

$$\bar{x}_2^3 + \gamma \bar{x}_2 = 0$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$\bar{x}_2(\bar{x}_2^2 + \gamma) = 0$$

che ha come soluzioni:

- $\bar{x}_2 = 0$ *per qualsiasi valore di* γ
- $\bar{x}_2 = \sqrt{-\gamma}, -\sqrt{-\gamma}$ *solo se* $\gamma \leq 0$

Considerando la prima equazione si ha (dato che $\alpha \neq 0$ per ipotesi) $\bar{x}_1 = -\frac{\beta}{\alpha} \cos(\bar{x}_2)$.

Quindi sono possibili tre soluzioni:

I. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (-\frac{\beta}{\alpha}, 0, 0)$ *per qualsiasi valore di* γ

II. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (-\frac{\beta}{\alpha} \cos(\sqrt{-\gamma}), \sqrt{-\gamma}, 0)$ *solo se* $\gamma \leq 0$

III. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \left(-\frac{\beta}{\alpha} \cos(-\sqrt{-\gamma}\right), -\sqrt{-\gamma}, 0)$ *solo se* $\gamma \leq 0$

1.3. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato nell'intorno di un punto equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ generico.

Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$. *Il sistema linearizzato è il seguente:*

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\, \delta u$$

$$\delta y = C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\, \delta u$$

dove

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \sin(\bar{x}_2) \\ 0 & 3\bar{x}_2^2 + \gamma \end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4\bar{u} \end{bmatrix}$$

$$C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = [1 \quad 0], \qquad D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = 0$$

1.4. Considerando i punti di equilibrio determinati al punto 1.2, determinare le loro proprietà di stabilità al variare dei parametri α, β, γ.

Gli autovalori della matrice di sistema sono $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 3\bar{x}_2^2 + \gamma$. *Si considerino i tre possibili equilibri:*

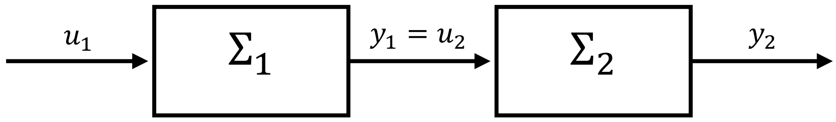
I. $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \gamma$*: il movimento di equilibrio è asintoticamente stabile se e solo se* $\alpha < 0$ *e* $\gamma < 0$. *Se* $\alpha < 0$ *e* $\gamma = 0$ *(si ricordi che il caso* $\alpha = 0$ *è escluso dai dati del problema) non è possibile trarre conclusioni (il sistema linearizzato presenta un polo nullo). Infine se* $\alpha > 0$ *o* $\gamma > 0$ *il movimento di equilibrio è instabile.*

II. *(vale solo se* $\gamma \leq 0$): $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 3|\gamma| + \gamma = 2|\gamma|$*:*
   a. *se* $\gamma = 0$*: non è possibile trarre conclusioni se* $\alpha < 0$, *mentre l'equilibrio è instabile se* $\alpha > 0$,
   b. *se* $\gamma < 0$*: il movimento di equilibrio è instabile.*

III. *analogo al caso* II.

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente schema



dove i modelli dei sistemi Σ_1 e Σ_2 sono i seguenti

$$\Sigma_1 \colon \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + u_1(t) \\ y_1(t) &= 2x_1(t) \end{cases} \qquad \Sigma_2 \colon \begin{cases} \dot{x}_2(t) &= -u_2(t) \\ y_2(t) &= x_2(t) \end{cases}$$

2.1. Scrivere le equazioni del sistema avente come ingresso $u_1(t)$ e uscita $y_2(t)$.

Sostituendo nel secondo sottosistema $u_2 = y_1 = 2x_1$ *e considerando il sistema collettivamente si ottiene*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) \\ y_2(t) &= x_2 \end{aligned}$$

2.2. Valutare le proprietà di stabilità del sistema così ottenuto.

La matrice di sistema A risulta

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

i cui auto valori sono $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$. *Il sistema risulta perciò semplicemente stabile.*

2.3. Calcolare il movimento libero dell'uscita, ottenuto con la seguente condizione iniziale

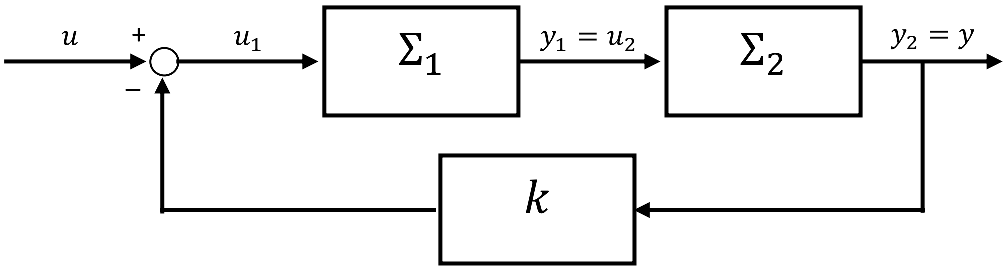
$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalla risposta al punto 2.2 si ottiene che i modi del sistema sono e^{-3t} *e* 1. *La risposta libera dell'uscita risulta essere pertanto una combinazione lineare dei suddetti modi:*

$$y(t) = \gamma_1 e^{-3t} + \gamma_2$$

da cui si ottiene che $y(0) = \gamma_1 + \gamma_2$ *, che* $\dot{y}(t) = -3\gamma_1 e^{-3t}$ *e che* $\dot{y}(0) = -3\gamma_1$. *Dalle equazioni del sistema si ha che* $y(0) = Cx(0) = x_2(0) = 0$, *mentre* $\dot{y}(0) = CAx(0) = -2$. *Da qui si ottiene che* $\gamma_1 = 2/3$ *e* $\gamma_2 = -2/3$.

2.4. Considerando lo schema retroazionato ($u_1(t) = u(t) - ky(t)$) illustrato nella figura seguente



si scrivano le equazioni del sistema avente come ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

Sostituendo nella prima equazione $u_1 = u - ky_2 = u - kx_2$, *e rinominando* $y(t) = y_2(t)$ *si ottiene*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) - kx_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) \\ y(t) &= x_2 \end{aligned}$$

2.5. Si valutino i valori del parametro reale k che garantiscono asintotica stabilità del sistema retroazionato.

La matrice di sistema del sistema ad anello chiuso A_{ac} *risulta*

$$A_{ac} = \begin{bmatrix} -3 & -k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 2k$. *Dato che l'ordine è 2, condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso è k<0.*

2.6. Si ponga $k = -1$. Se $u(t) = 3\ \forall t$, si calcoli il valore assunto dall'uscita $y(t)$ a transitorio esaurito.

Se k=-1 il sistema retroazionato risulta essere asintoticamente stabile, per cui l'equilibrio calcolato ponendo $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0$ *corrisponde con la condizione ottenuta a transitorio esaurito. Dalle equazioni si ottiene che* $\bar{x}_1 = 0$ *e che* $\bar{x}_2 = -\bar{u} = -3$. *Pertanto, a transitorio esaurito,* $y(t) = -3$.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & -10x_1(t) + 10u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -0.1\,x_2\ (t) + u(t) \\ y(t) & = & x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

3.1. Si scriva la funzione di trasferimento del sistema.

Le matrici di sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 1], D = 0$$

Applicando la formula $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ *si ottiene che*

$$G(s) = \frac{11(s+1)}{(1+0.1s)(1+10s)}$$

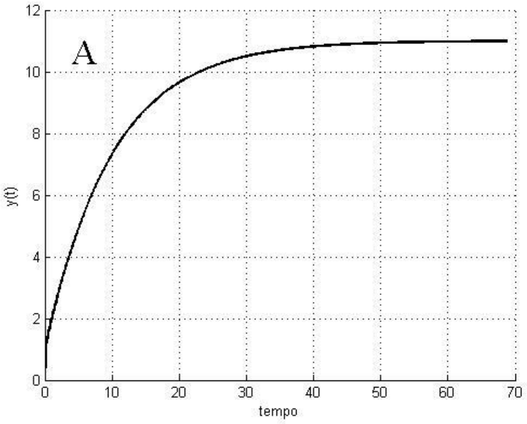
3.2. Si calcolino, per la funzione di trasferimento ricavata al punto 3.1.

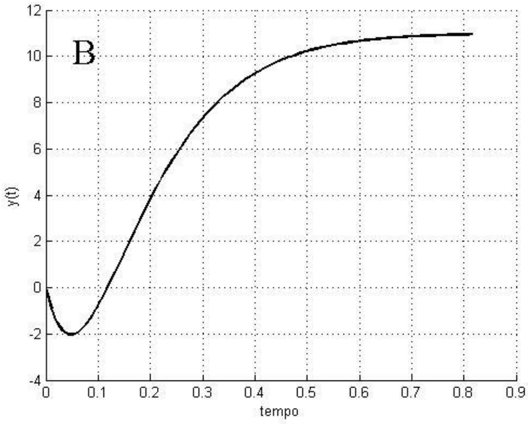
a) guadagno: $\mu = 11$
b) tipo: *g=0*
c) poli: *s=-10,-0.1*
d) zeri: *s=-1*
e) polo dominante: *s=-0.1*

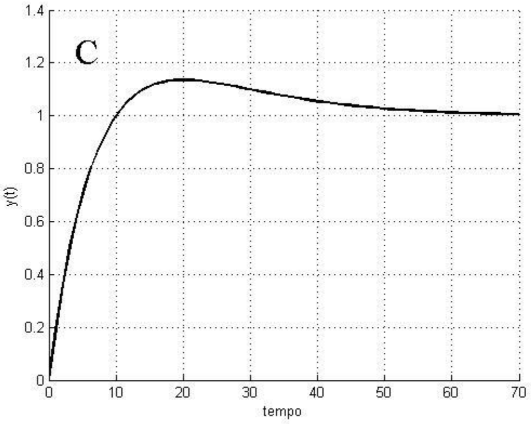
3.3. Si indichi quale dei seguenti grafici mostra la risposta del sistema ad uno scalino di ampiezza unitaria. Si motivi la risposta in modo conciso.

Il sistema non presenta zeri con parte reale positiva: questo (unitamente al fatto che la costante di tempo del polo dominante è 1/0.1=10 unità di tempo da cui si evince che il tempo di assestamento sarà circa 50 unità di tempo) esclude la risposta inversa del grafico B. Inoltre lo zero del sistema non si trova tra l'asse immaginario ed il polo dominante: questo (unitamente al fatto che il guadagno del sistema è 11) esclude la sovraelongazione del grafico C.

Pertanto la risposta corretta è A.







3.4. Si indichi quale delle seguenti funzioni di trasferimento costituisce una opportuna approssimazione ai poli dominanti di quella ricavata al punto 3.1. Si illustri brevemente il motivo di tale scelta.

$$G_a(s) = \frac{11}{s+0.1}\ ,\quad G_b(s) = \frac{11}{1+10s}\ ,\quad G_c(s) = \frac{11}{1+0.1s}\ ,\quad G_d(s) = \frac{11}{s+1}$$

Come già visto, il polo dominante corrisponde a s=-0.1, il guadagno è $\mu = 11$ *e lo zero non fornisce un contributo significativo alla risposta del sistema.*

Pertanto la risposta corretta è $G_b(s)$*.*

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & -4x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_1\ (t) - x_2\ (t) \\ y(t) & = & x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$

4.1. Si scriva la funzione di trasferimento del sistema.

Le matrici di sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 3], D = 0$$

Applicando la formula $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ *si ottiene che*

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+4)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

4.2. Si consideri il segnale di ingresso $u(t) = e^{-2t}$. Si calcoli la trasformata di Laplace della risposta forzata dell'uscita Y(s) all'ingresso considerato

La trasformata di Laplace di u(t) è U(s)=1/(s+2). Dato che Y(s)=G(s)U(s) si ottiene

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

4.3. Si calcoli la risposta forzata dell'uscita $y(t)$ mediante il calcolo della antitrasformata di Laplace della funzione Y(s).

Dalla soluzione ottenuta al punto precedente si ottiene che la risposta forzata del sistema all'ingresso dato è

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$