INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

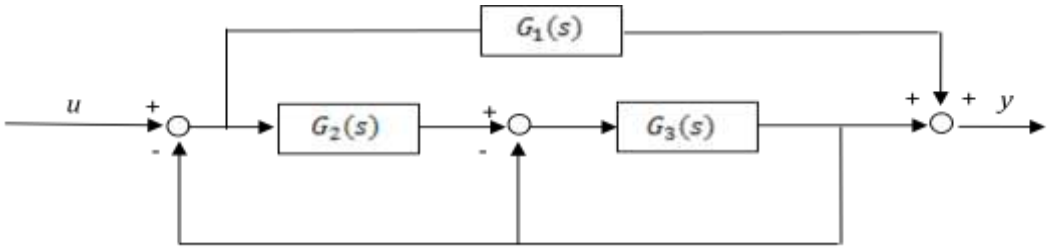
SOLUZIONI

Secondo compitino – 04 luglio 2012

Anno Accademico 2011/2012

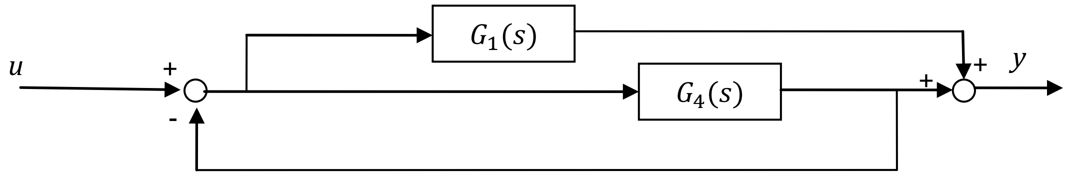
ESERCIZIO 1

Si consideri il seguente schema a blocchi:



A. Trovare la funzione di trasferimento equivalente tra l'ingresso u e l'uscita y.

Lo schema dato risulta equivalente al seguente



dove

$$G_4(s) = \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_3(s)}$$

da cui si ottiene facilmente che

$$G_{tot}(s) = \frac{G_1(s) + G_4(s)}{1 + G_4(s)}$$

B. Esiste nello schema a blocchi in figura una (o più) funzione di trasferimento la cui asintotica stabilità è necessaria per garantire la asintotica stabilità dell'intero sistema?

Per garantire che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile è necessario che la funzione di trasferimento $G_1(s)$ sia relativa ad un sistema asintoticamente stabile. Infatti, non essendo tale sistema inserito in anelli di retroazione, i suoi autovalori risultano essere parte degli autovalori del sistema complessivo.

C. Si ponga:

$$G_1(s) = \frac{\beta}{s+2},\ G_2(s) = \frac{\alpha}{s},\ G_3(s) = \frac{1}{s+1}$$

Dopo aver verificato che, sostituendo le funzioni date, la funzione complessiva richiesta al punto A. risulta essere

$$G_{tot}(s) = \frac{\beta s + \alpha}{s^2 + 2s + \alpha}$$

si risponda alle seguenti domande:

Si calcola

$$G_4(s) = \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_3(s)} = \frac{\alpha}{s(s+2)}$$

Pertanto

$$G_{tot}(s) = \frac{G_1(s) + G_4(s)}{1 + G_4(s)} = \frac{\beta s + \alpha}{s^2 + 2s + \alpha}$$

C.1. Si discutano le proprietà di stabilità del sistema complessivo al variare dei parametri α e β.

Dato che (ammettendo che non vi siano autovalori "nascosti" nei sistemi le cui funzioni di trasferimento sono $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$, o che essi abbiano parte reale negativa) i tre sottosistemi che compongono lo schema sono del primo ordine, l'ordine del sistema complessivo risulta essere tre. L'autovalore non corrispondente con un polo della funzione di trasferimento complessiva risulta quello della funzione G_1, ossia $\lambda = -2$. Pertanto la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità del sistema complessivo è che le radici del polinomio $s^2 + 2s + \alpha$ abbiano parte reale negativa. Quest'ultima condizione vale se e solo se $\alpha > 0$.

Se $\alpha = 0$ la funzione di trasferimento del sistema risulta essere $G_1(s)$, mentre gli auto valori "nascosti" risultano essere $\lambda = 0$,-2 (poli di $G_4(s)$) ed il sistema risultante è semplicemente stabile.

Se $\alpha < 0$ il polinomio $s^2 + 2s + \alpha$ presenta una radice a parte reale positiva, e pertanto il sistema complessivo è instabile.

C.2. Si discuta come varia il guadagno del sistema al variare dei parametri α e β.

Se $\alpha \neq 0$ il guadagno della funzione di trasferimento ottenuta è pari a 1 e risulta essere indipendente dai valori assunti da $\alpha \neq 0$ e β.

Se $\alpha = 0$ la funzione di trasferimento del sistema risulta essere $G_1(s)$, che ha guadagno pari a $\beta/2$.

D. Si ponga $\alpha = 1$. Si indichi quale dei seguenti grafici corrisponde alla risposta (in termini di andamento della variabile di uscita $y(t)$) del sistema complessivo ad uno scalino di ampiezza unitaria $u(t) = sca(t)$ nei seguenti casi. Si motivino adeguatamente le risposte.

a. $\beta = 1$: *in questo caso*

$$G_{tot}(s) = \frac{1}{s+1}$$

e la risposta forzata ad uno scalino di ampiezza unitaria corrisponde con il secondo grafico. Si noti infatti che il guadagno è 1, che il tempo di assestamento è circa 5 unità di tempo, e che non sono presenti i fenomeni della risposta inversa e della sovraelongazione.

b. $\beta = 10$: *in questo caso*

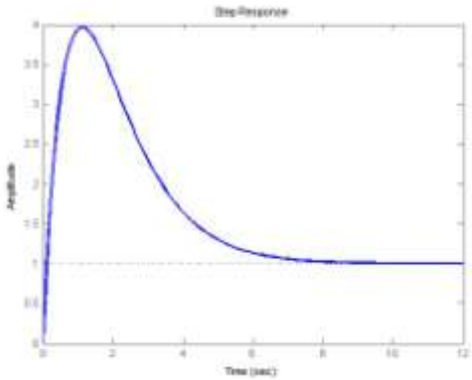
$$G_{tot}(s) = \frac{1 + 10s}{(s+1)^2}$$

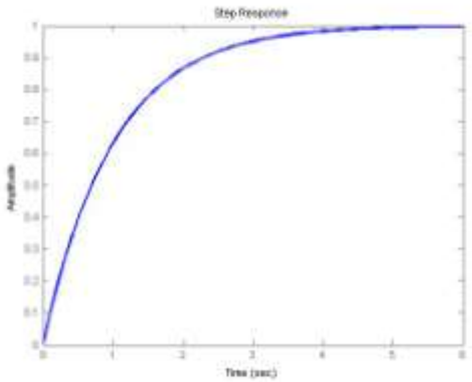
e la risposta forzata ad uno scalino di ampiezza unitaria corrisponde con il primo grafico. Si noti infatti la presenza di uno zero avente parte reale negativa e che si trova tra il polo dominante e l'asse immaginario, che caratterizza i sistemi che presentano sovraelongazioni.

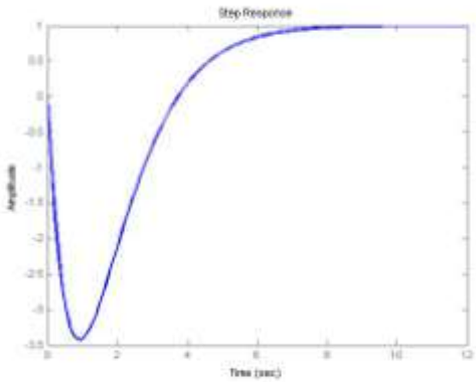
c. $\beta = -10$: *in questo caso*

$$G_{tot}(s) = \frac{1 - 10s}{(s+1)^2}$$

e la risposta forzata ad uno scalino di ampiezza unitaria corrisponde con il terzo grafico. Si noti infatti la presenza di uno zero avente parte reale positiva, che caratterizza i sistemi che presentano il fenomeno della risposta inversa.

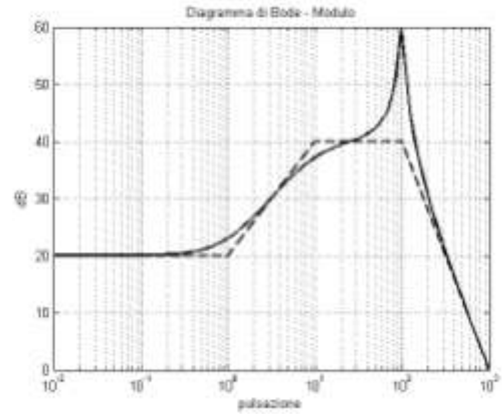


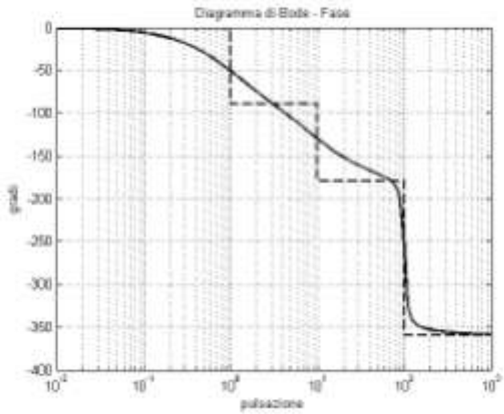




ESERCIZIO 2

Si consideri un sistema lineare tempo-invariante di ordine 3 (dove non siano presenti poli/zeri "nascosti") la cui funzione di trasferimento $G(s)$ ha associati i diagrammi di Bode mostrati in figura:





A. Rispondere alle seguenti domande, relative alla funzione di trasferimento G(s):

a. è propria o strettamente propria? *G(s) è strettamente propria. Infatti, per* $\omega \to \infty$, $|G(j\omega)| \to 0$.

b. è a fase minima? *No. Infatti, in corrispondenza della pulsazione* $\omega = 1$ *il diagramma del modulo ha un cambio di pendenza positivo (il che denota la presenza di uno zero), mentre il diagramma della fase "scende" di 90 gradi (il che denota che lo zero ha parte reale positiva).*

c. il sistema rappresentato da $G(s)$ è asintoticamente stabile? *Sì. Infatti, in corrispondenza delle pulsazioni* $\omega = 10$ *e* $\omega = 100$ *il diagramma del modulo ha cambi di pendenza negativi (il che denota la presenza di poli), e il diagramma della fase "scende" di 90° in* $\omega = 10$ *(il che denota che il polo ha parte reale negativa) e di 180° in* $\omega = 100$ *(il che denota i poli complessi coniugati hanno parte reale negativa).*

d. qual è il tipo *g*? *g=0, infatti la pendenza del diagramma del modulo in* $\omega = 0$ *è nulla*.

e. possiede zeri? Se la risposta è affermativa indicare il valore di tali zeri. *Coerentemente con la risposta alla domanda b. esiste uno zero in s=1.*

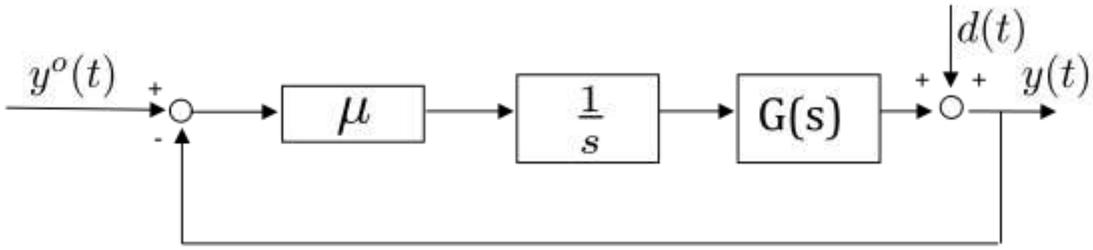
f. possiede poli? Se la risposta è affermativa indicare se tali poli sono reali o complessi coniugati. Nel caso degli poli reali indicare i loro valori, mentre nel caso di poli complessi coniugati indicarne la pulsazione naturale e stimarne lo smorzamento. *Coerentemente con la risposta al punto c., esiste uno zero reale in s=-10, ed una coppia di poli complessi coniugati aventi pulsazione naturale* $\omega_n = 100$. *Per trovare il valore dello smorzamento si ricordi che l'ampiezza del picco nel diagramma del modulo è pari a 1/2ξ =20dB=10. Da qui, si ottiene che* $\xi = 0.05$.

B. Dato un segnale sinusoidale in ingresso al sistema $u(t)=20\sin(0.1t)$, si determini il valore della ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a regime.

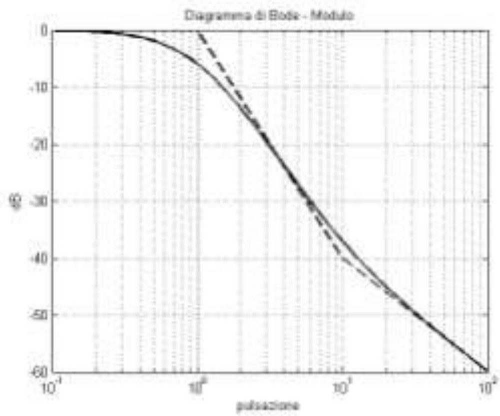
Si applica il teorema della risposta in frequenza: l'ampiezza della sinusoide in uscita dal sistema a transitorio esaurito è pari a $20 \cdot |G(j0.1)|$. *Dal diagramma si ottiene che* $|G(j0.1)|=20\,dB=10$.

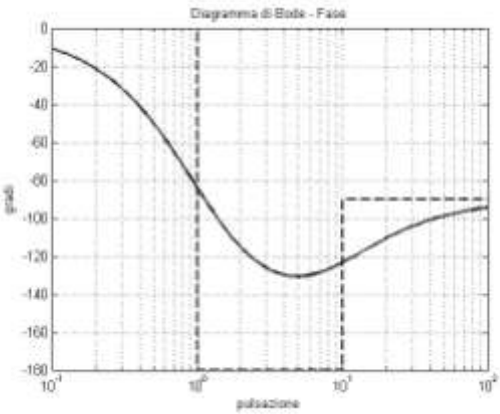
ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente schema di controllo retroazionato:



dove la funzione di trasferimento G(s) è caratterizzata dai seguenti diagrammi di Bode:





A. Si calcoli l'intervallo di valori per $\mu > 0$ che garantisce l'asintotica stabilità del sistema retroazionato complessivo.

Dai diagrammi di Bode mostrati in figura si nota facilmente che

- *il diagramma asintotico del modulo di* $L_0(s) = \frac{1}{s}G(s)$ *attraversa l'asse a 0dB in* $\omega = 1$ *rad/s (dove avviene un cambio di pendenza negativo di -40dB/dec),*
- *il diagramma della fase di* $L_0(s) = \frac{1}{s}G(s)$ *corrisponde con quello mostrato di G(s) traslato di* $-90°$

Pertanto, per $\mu = 1$, *la funzione ad anello è L(s)=*$L_0(s)$ *ed ha, come visto, pulsazione critica* ***approssimativamente*** $\omega_c = 1$ (l'analisi condotta è volutamente semplificata), *fase critica circa pari a* $\varphi_c = -180°$ *e margine di fase* $\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 0$*. Da qui segue che per* $\mu > 1$ *il margine di fase risulta negativo (ed il sistema in anello chiuso instabile, secondo il teorema di Bode), mentre per* $0 < \mu < 1$ *il margine di fase risulta positivo (ed il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile, per il teorema di Bode).*

B. Si ponga $\mu = 0.1$. Si calcoli in modo approssimato l'espressione della funzione di trasferimento tra la variabile di riferimento $y^o(t)$ e l'uscita $y(t)$. Come viene normalmente chiamata tale funzione di trasferimento?

La funzione di trasferimento richiesta è detta funzione di sensitività complementare F(s). Per $\mu = 0.1$, *il diagramma di Bode del modulo di L(s) attraversa l'asse a 0dB in corrispondenza della pulsazione* $\omega_c = 0.1$*. In tale punto, è facile vedere che la fase critica è circa pari a -90°-10°=-100°, che corrisponde a un margine di fase di circa 80°>75°. Perciò F(s) è approssimabile con una funzione di trasferimento avente un polo, del tipo:*

$$F(s) \cong \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}$$

Dato che il tipo della funzione d'anello L(s) è g=1 si ottiene

$$\mu_F = \lim_{s \to 0} \frac{\mu_L}{\mu_L + s^g} = 1.$$

C. Sempre considerando $\mu = 0.1$, si supponga che $d(t) = \sin(0.01t)$ *e* $y^o(t) = 0$. Si determini il valore della ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a regime.

La funzione di trasferimento tra il disturbo d(t) e l'uscita è la funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

il cui modulo è approssimabile con $1/|L(j\omega)|$ *per* $\omega < \omega_c$*. In* $\omega = .01$ $|L(j0.01)| = 10$*, da cui si trova che l'ampiezza richiesta della sinusoide in uscita, per il teorema della risposta in frequenza è 0.1.*

ESERCIZIO 4

Enunciare con precisione il criterio di Nyquist.

Si veda il libro di testo consigliato.