INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

SOLUZIONI

Appello– 04 luglio 2012

Anno Accademico 2011/2012

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & -x_1^3(t) + x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = & -x_2(t) + x_1(t) + u(t) \\ y(t) = & x_1^2(t) + x_2(t) \end{cases}$$

A. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema, motivando brevemente le risposte:

a. è lineare o non lineare*? E' non lineare perché le funzioni che compaiono nel sistema sono non lineari.*

b. è statico o dinamico? *E' dinamico perché il valore assunto dalle variabili di stato nel tempo non dipende unicamente dai valori assunti dalla variabile di ingresso, ma anche dalle condizioni iniziali.*

c. è strettamente proprio? *sì, perché la funzione di uscita non dipende dall'ingresso*

d. è MIMO? *no, perché sono presenti una sola variabile di ingresso e una sola variabile di uscita.*

e. qual è l'ordine del sistema? *il numero di variabili di stato (l'ordine) è n=2.*

B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.

Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$. *Il sistema linea rizzato è il seguente:*

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\, \delta u$$

$$\delta y = C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\, \delta u$$

dove

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -3\bar{x}_1^2 + \bar{u} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = [2\bar{x}_1 \quad 1], \qquad D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = 0$$

C. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.

Le equazioni del sistema all'equilibrio si ottengono ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ *e* $u(t)$=1:

$$-\bar{x}_1^3 + \bar{x}_1 = -\bar{x}_1(\bar{x}_1^2 - 1) = \bar{x}_1(\bar{x}_1 - 1)(\bar{x}_1 + 1) = 0$$

$$-\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + 1 = 0 \ \rightarrow \ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 + 1$$

Quindi sono possibili tre soluzioni:

I. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (0,1,1)$

II. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (1,2,1)$

III. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (-1,0,1)$

D. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati al punto precedente.

Gli autovalori della matrice di sistema sono $\lambda_1 = -3\bar{x}_1^2 + \bar{u}$*,* $\lambda_2 = -1$*. Si considerino i tre possibili equilibri:*

I. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$*: l'equilibrio è instabile.*
II. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$*: l'equilibrio è asintoticamente stabile.*
III. *analogo al caso* II.

E. Determinare l'espressione analitica del movimento dello stato e dell'uscita associati alla condizione iniziale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ e all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$ (suggerimento: si osservi che la prima equazione è indipendente dalla seconda, e che la seconda è lineare).

Si noti che la prima equazione è indipendente dal valore di $x_2(t)$ *e che il valore di* $x_1(0)$ *corrisponde con il valore d'equilibrio* (II.) *corrispondente con il valore dell'ingresso* $u(t) = \bar{u} = 1$*. Perciò* $x_1(t) = 1$ *per* $t \geq 0$*. La seconda equazione è lineare e, dato che il valore assunto da* $x_1(t)$ *è costante, corrisponde con* $\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_1(t) + u(t) = -x_2(t) + 2$*. la soluzione, ottenuta risolvendo l'equazione di Lagrange, è*

$$x_2(t) = 2 - e^{-t}$$

Il movimento dell'uscita corrispondente è

$$y(t) = x_1^2(t) + x_2(t) = 3 - e^{-t}$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = & -10x_2(t) - x_1(t) - u(t) \\ y(t) = & x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$

A. Determinare il movimento libero dell'uscita corrispondente con la condizione iniziale $\left(x_1(0), x_2(0)\right) = (1,0)$.

La matrice di sistema A risulta

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}$$

i cui auto valori sono $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -10$*. Da qui, si ottiene che i modi del sistema sono* e^{-t} *e* e^{-10t}*. La risposta libera dell'uscita risulta essere pertanto una combinazione lineare dei suddetti modi:*

$$y(t) = \gamma_1 e^{-t} + \gamma_2 e^{-10t}$$

da cui si ottiene che $y(0) = \gamma_1 + \gamma_2$ *, che* $\dot{y}(t) = -\gamma_1 e^{-t} - 10\gamma_2 e^{-10t}$ *e che* $\dot{y}(0) = -\gamma_1 - 10\gamma_2$*. Dalle equazioni del sistema si ha che* $y(0) = Cx(0) = 1$*, mentre* $\dot{y}(0) = CAx(0) = -4$*. Da qui si ottiene che* $\gamma_1 = 2/3$ *e* $\gamma_2 = 1/3$*.*

B. Determinare la funzione di trasferimento del sistema avente ingresso *u*(*t*) e uscita *y*(*t*). Si specifichino gli zeri, i poli, il guadagno e il tipo della funzione di trasferimento ottenuta.

Le matrici di sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, D = 0$$

Applicando la formula $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ *si ottiene che*

$$G(s) = \frac{2}{5} \frac{(1 - s/2)}{(1 + 0.1s)(1 + s)}$$

a) guadagno: $\mu = 2/5$
b) tipo: *g=0*
c) poli: *s=-10,-1*
d) zeri: *s=2*

C. Si consideri il movimento forzato dell'uscita rispetto all'ingresso $u(t) = 2e^{-2t}$ (si noti che non è richiesto calcolarlo esplicitamente). Si determinino, attraverso i teoremi dei valori iniziale e finale, i seguenti valori: $y(0), \dot{y}(0), \lim_{t\to\infty} y(t)$.

La trasformata di Laplace di $u(t) = 2e^{-2t}$ *è pari a* $U(s)=\frac{2}{s+2}$*. Da qui*

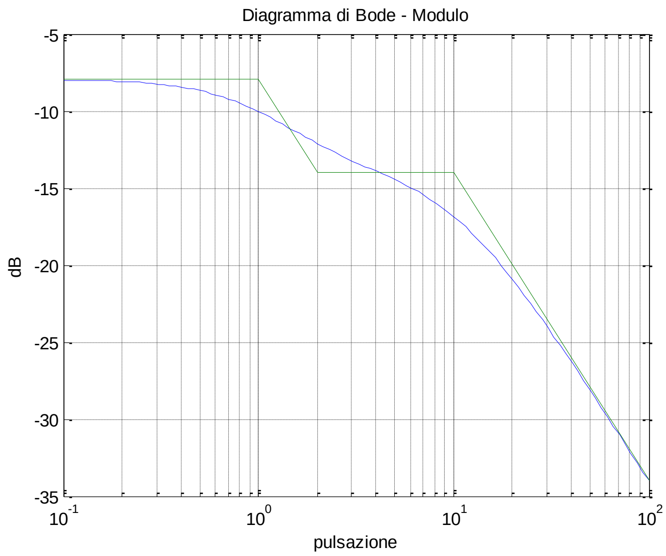
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{5}\frac{(1 - s/2)}{(1 + 0.1s)(1 + s)(s + 2)}$$

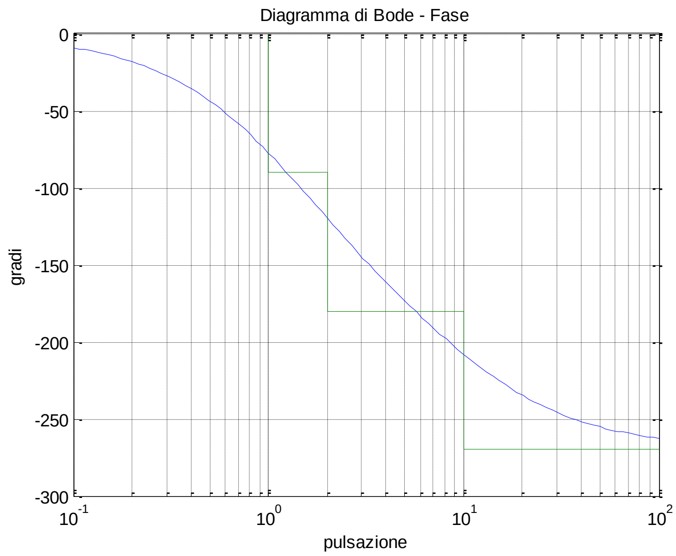
Si calcola

- $y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$
- $\mathcal{L}\big(\dot{y}(t)\big) = sY(s) - y(0) = \frac{4}{5}\frac{s(1-s/2)}{(1+0.1s)(1+s)(s+2)}$
- $\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}\big(\dot{y}(t)\big) = -4$
- $y(+\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = 0$

Le condizioni di applicabilità dei teoremi del valore iniziale e finale sono verificate, in quanto sia $Y(s)$ che $\mathcal{L}\big(\dot{y}(t)\big)$ sono trasformate razionali con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore, con poli aventi parte reale negativa.

D. Si traccino i diagrammi di Bode di modulo e fase asintotici della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento G(s).





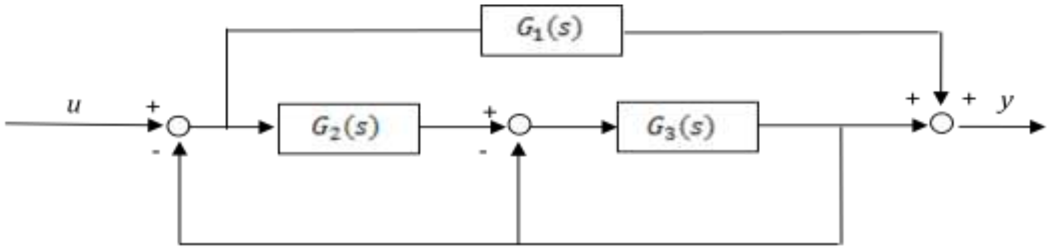
E. Si calcoli lo sfasamento di G(jω) in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$ rad/s (si usi il regolo delle fasi o si calcoli direttamente questo valore dalla G(s)).

Si calcola:

$$\arg\big(G(j1)\big) = \arg\left(1 - \frac{j}{2}\right) - \arg(1 + 0.1j) - \arg(1 + j) = -\operatorname{atan}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{atan}(0.1) - \operatorname{atan}(1) = -77.3°$$

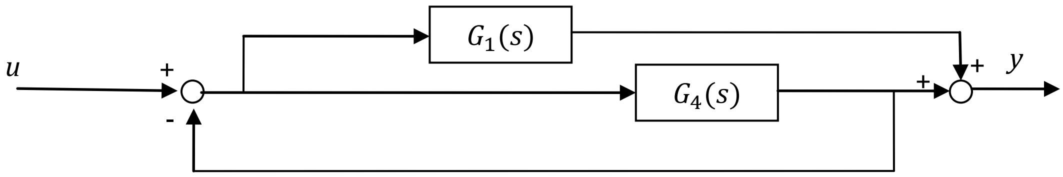
ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente schema a blocchi:



A. Trovare la funzione di trasferimento equivalente tra l'ingresso u e l'uscita y.

Lo schema dato risulta equivalente al seguente



dove

$$G_4(s) = \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_3(s)}$$

da cui si ottiene facilmente che

$$G_{tot}(s) = \frac{G_1(s) + G_4(s)}{1 + G_4(s)}$$

B. Esiste nello schema a blocchi in figura una (o più) funzione di trasferimento la cui asintotica stabilità è necessaria per garantire la asintotica stabilità dell'intero sistema?

Per garantire che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile è necessario che la funzione di trasferimento $G_1(s)$ sia relativa ad un sistema asintoticamente stabile. Infatti, non essendo tale sistema inserito in anelli di retroazione, i suoi autovalori risultano essere parte degli autovalori del sistema complessivo.

C. Si ponga:

$$G_1(s) = \frac{\beta}{s+2},\ G_2(s) = \frac{\alpha}{s},\ G_3(s) = \frac{1}{s+1}$$

Dopo aver verificato che, sostituendo le funzioni date, la funzione complessiva richiesta al punto A. risulta essere

$$G_{tot}(s) = \frac{\beta s + \alpha}{s^2 + 2s + \alpha}$$

si risponda alle seguenti domande:

Si calcola

$$G_4(s) = \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_3(s)} = \frac{\alpha}{s(s+2)}$$

Pertanto

$$G_{tot}(s) = \frac{G_1(s) + G_4(s)}{1 + G_4(s)} = \frac{\beta s + \alpha}{s^2 + 2s + \alpha}$$

C.1. Si discutano le proprietà di stabilità del sistema complessivo al variare dei parametri α e β.

Dato che (ammettendo che non vi siano autovalori "nascosti" nei sistemi le cui funzioni di trasferimento sono $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$, o che essi abbiano parte reale negativa) i tre sottosistemi che compongono lo schema sono del primo ordine, l'ordine del sistema complessivo risulta essere tre. L'autovalore non corrispondente con un polo della funzione di trasferimento complessiva risulta quello della funzione G_1, ossia $\lambda = -2$. Pertanto la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità del sistema complessivo è che le radici del polinomio $s^2 + 2s + \alpha$ abbiano parte reale negativa. Quest'ultima condizione vale se e solo se $\alpha > 0$.

Se $\alpha = 0$ la funzione di trasferimento del sistema risulta essere $G_1(s)$, mentre gli auto valori "nascosti" risultano essere $\lambda = 0$,-2 (poli di $G_4(s)$) ed il sistema risultante è semplicemente stabile.

Se $\alpha < 0$ il polinomio $s^2 + 2s + \alpha$ presenta una radice a parte reale positiva, e pertanto il sistema complessivo è instabile.

C.2. Si discuta come varia il guadagno del sistema al variare dei parametri α e β.

Se $\alpha \neq 0$ il guadagno della funzione di trasferimento ottenuta è pari a 1 e risulta essere indipendente dai valori assunti da $\alpha \neq 0$ e β.

Se $\alpha = 0$ la funzione di trasferimento del sistema risulta essere $G_1(s)$, che ha guadagno pari a $\beta/2$.

D. Si ponga $\alpha = 1$. Si indichi quale dei seguenti grafici corrisponde alla risposta (in termini di andamento della variabile di uscita $y(t)$) del sistema complessivo ad uno scalino di ampiezza unitaria $u(t) = sca(t)$ nei seguenti casi. Si motivino adeguatamente le risposte.

a. $\beta = 1$: *in questo caso*

$$G_{tot}(s) = \frac{1}{s+1}$$

e la risposta forzata ad uno scalino di ampiezza unitaria corrisponde con il secondo grafico. Si noti infatti che il guadagno è 1, che il tempo di assestamento è circa 5 unità di tempo, e che non sono presenti i fenomeni della risposta inversa e della sovraelongazione.

b. $\beta = 10$: *in questo caso*

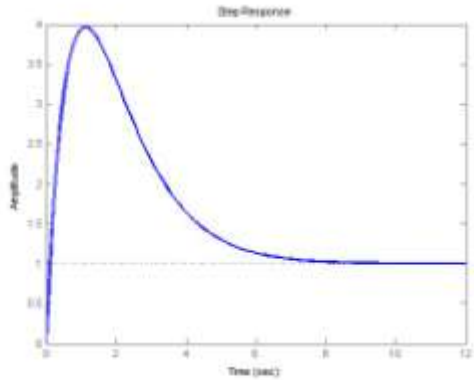
$$G_{tot}(s) = \frac{1 + 10s}{(s+1)^2}$$

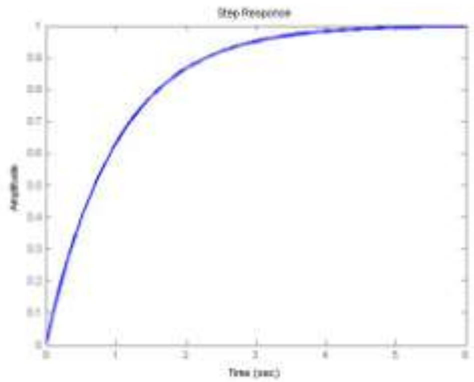
e la risposta forzata ad uno scalino di ampiezza unitaria corrisponde con il primo grafico. Si noti infatti la presenza di uno zero avente parte reale negativa e che si trova tra il polo dominante e l'asse immaginario, che caratterizza i sistemi che presentano sovraelongazioni.

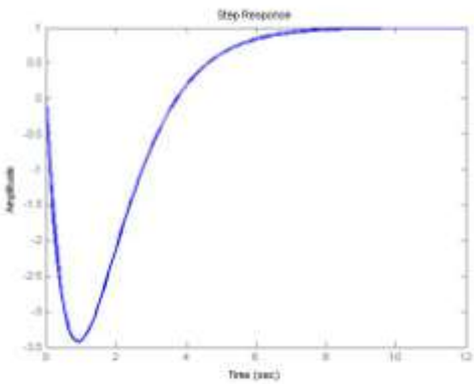
c. $\beta = -10$: *in questo caso*

$$G_{tot}(s) = \frac{1 - 10s}{(s + 1)^2}$$

e la risposta forzata ad uno scalino di ampiezza unitaria corrisponde con il terzo grafico. Si noti infatti la presenza di uno zero avente parte reale positiva, che caratterizza i sistemi che presentano il fenomeno della risposta inversa.

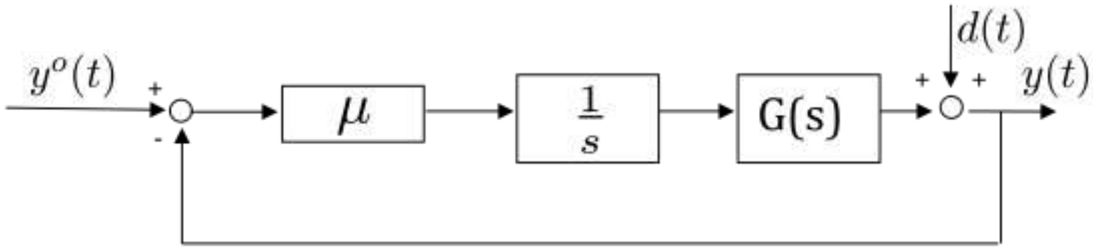




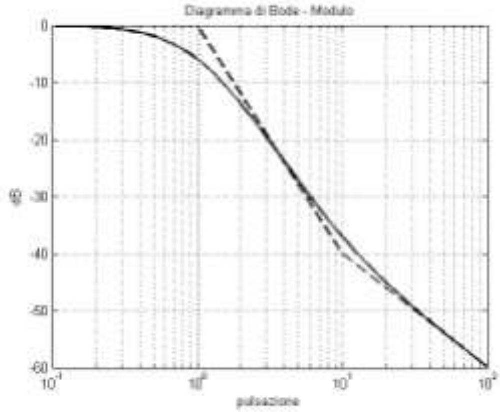


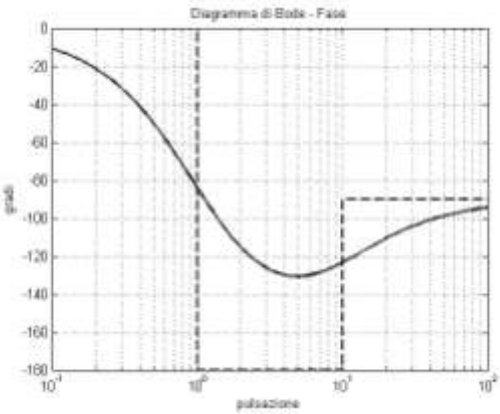
ESERCIZIO 4

Si consideri il seguente schema di controllo retroazionato:



dove la funzione di trasferimento G(s) è caratterizzata dai seguenti diagrammi di Bode:





A. Si calcoli l'intervallo di valori per $\mu > 0$ che garantisce l'asintotica stabilità del sistema retroazionato complessivo.

Dai diagrammi di Bode mostrati in figura si nota facilmente che

- *il diagramma asintotico del modulo di* $L_0(s) = \frac{1}{s}G(s)$ *attraversa l'asse a 0dB in* $\omega = 1$ *rad/s (dove avviene un cambio di pendenza negativo di -40dB/dec),*
- *il diagramma della fase di* $L_0(s) = \frac{1}{s}G(s)$ *corrisponde con quello mostrato di G(s) traslato di - 90°.*

Pertanto, per $\mu = 1$, *la funzione ad anello è L(s)=*$L_0(s)$ *ed ha, come visto, pulsazione critica* ***approssimativamente*** $\omega_c = 1$ (l'analisi condotta è volutamente semplificata), *fase critica circa pari a* $\varphi_c = -180°$ *e margine di fase* $\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 0$. *Da qui segue che per* $\mu > 1$ *il margine di fase risulta negativo (ed il sistema in anello chiuso instabile, secondo il teorema di Bode), mentre per* $0 < \mu < 1$ *il margine di fase risulta positivo (ed il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile, per il teorema di Bode).*

B. Si ponga $\mu = 0.1$. Si calcoli in modo approssimato l'espressione della funzione di trasferimento tra la variabile di riferimento $y^o(t)$ e l'uscita $y(t)$. Come viene normalmente chiamata tale funzione di trasferimento?

La funzione di trasferimento richiesta è detta funzione di sensitività complementare F(s). Per $\mu = 0.1$, *il diagramma di Bode del modulo di L(s) attraversa l'asse a 0dB in corrispondenza della pulsazione* $\omega_c = 0.1$. *In tale punto, è facile vedere che la fase critica è circa pari a -90°-10°=-100°, che corrisponde a un margine di fase di circa 80°>75°. Perciò F(s) è approssimabile con una funzione di trasferimento avente un polo, del tipo:*

$$F(s) \cong \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}$$

Dato che il tipo della funzione d'anello L(s) è g=1 si ottiene

$$\mu_F = \lim_{s \to 0} \frac{\mu_L}{\mu_L + s^g} = 1.$$

C. Sempre considerando $\mu = 0.1$, si supponga che $d(t) = \sin(0.01t)$ *e* $y^o(t) = 0$. Si determini il valore della ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a regime.

La funzione di trasferimento tra il disturbo d(t) e l'uscita è la funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

il cui modulo è approssimabile con $1/|L(j\omega)|$ *per* $\omega < \omega_c$. *In* $\omega = .01$ $|L(j0.01)| = 10$, *da cui si trova che l'ampiezza richiesta della sinusoide in uscita, per il teorema della risposta in frequenza è 0.1.*