INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME - SOLUZIONI

23 luglio 2012

Anno Accademico 2011/2012

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & -3x_1^3(t) + 3x_1(t)u(t) + x_2(t) - 1 \\ \dot{x}_2(t) = & -x_2(t) - x_1^2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_3(t) = & x_1^2(t) - x_3(t) + \frac{1}{2}x_1(t)x_3(t)u(t) \end{cases}$$

$$y = x_1(t)x_2(t) + 2x_3(t)$$

A. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u})$.

Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $\delta x_3 = x_3 - \bar{x}_3$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$. *Il sistema linearizzato è il seguente:*

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \\ \delta\dot{x}_3 \end{bmatrix} = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} + B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u})\, \delta u$$

$$\delta y = C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u})\, \delta u$$

dove

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -9\bar{x}_1^2 + 3\bar{u} & 1 & 0 \\ -2\bar{x}_1 & -1 & 0 \\ 2\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{x}_3\bar{u} & 0 & -1 + \frac{1}{2}\bar{x}_1\bar{u} \end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 3\bar{x}_1 \\ 2 \\ \frac{1}{2}\bar{x}_1\bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u}) = [\bar{x}_2 \quad \bar{x}_1 \quad 2], \qquad D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u}) = 0$$

B. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.

Le equazioni del sistema all'equilibrio si ottengono ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$ *e* $u(t)=1$:

$$-3\bar{x}_1^3 + 3\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 1 = 0$$
$$-\bar{x}_2 - \bar{x}_1^2 + 2 = 0$$
$$\bar{x}_1^2 - \bar{x}_3 + \frac{1}{2}\bar{x}_1\bar{x}_3 = 0$$

Dalla terza equazione si ottiene $\bar{x}_3 = \frac{\bar{x}_1^2}{1-\frac{1}{2}\bar{x}_1}$. *Dalla seconda equazione si ottiene che* $\bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2 + 2$. *Inserendo la precedente espressione nella prima equazione si ottiene*

$$-3\bar{x}_1^3 - \bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_1 + 1 = (3\bar{x}_1 + 1)(1 + \bar{x}_1)(1 - \bar{x}_1) = 0$$

Quindi sono possibili tre soluzioni:

I. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u}) = (-\frac{1}{3}, \frac{17}{9}, \frac{2}{21}, 1)$

II. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u}) = (-1,1,\frac{2}{3},1)$

III. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{u}) = (1,1,2,1)$

C. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati al punto precedente.

Data la struttura triangolare a blocchi della matrice A, gli autovalori della matrice di sistema sono

1. *gli autovalori della sottomatrice*
$$\begin{bmatrix} -9\bar{x}_1^2 + 3\bar{u} & 1 \\ -2\bar{x}_1 & -1 \end{bmatrix}$$
che ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = (\lambda + 9\bar{x}_1^2 - 3\bar{u})(\lambda + 1) + 2\bar{x}_1$
2. $\lambda_3 = -1 + \frac{1}{2}\bar{x}_1\bar{u}$.

Si considerino i tre possibili equilibri:

I. Sostituendo si ottiene $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 - \frac{2}{3}$*. Il fatto che i segni dei parametri del polinomio caratteristico non siano concordi denota la presenza di autovalori con parte reale positiva. Questo equilibrio risulta quindi instabile.*

II. Sostituendo si ottiene $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 2$*. Il fatto che i segni dei parametri del polinomio caratteristico siano concordi denota la presenza di soli autovalori con parte reale negativa. Inoltre* $\lambda_3 = -\frac{3}{2}$*. Questo equilibrio risulta quindi asintoticamente stabile.*

II. Sostituendo si ottiene $p(\lambda) = \lambda^2 + 9\lambda + 2$*. Il fatto che i segni dei parametri del polinomio caratteristico siano concordi denota la presenza di soli autovalori con parte reale negativa. Inoltre* $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$*. Questo equilibrio risulta quindi asintoticamente stabile.*

D. Determinare l'espressione analitica del movimento dello stato e dell'uscita associati alla condizione iniziale $x_1(0) = -1, x_2(0) = 1,\ x_3(0) = 1$ e all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.

Si noti che le prime due equazioni sono indipendenti dal valore di $x_3(t)$ *e che i valori di* $x_1(0)$ *e* $x_2(0)$ *corrispondono con i valori d'equilibrio* (II.) *corrispondenti con il valore dell'ingresso* $u(t) = \bar{u} = 1$*. Perciò* $x_1(t) = -1, x_2(t) = 1$ *per* $t \geq 0$*. Per valori costanti di* $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$ *la terza equazione risulta lineare in* $x_3(t)$ *e corrisponde con* $\dot{x}_3(t) = x_1^2(t) - x_3(t) + \frac{1}{2}x_1(t)x_3(t)u(t) = -\frac{3}{2}x_3(t) + 1$*. la soluzione, ottenuta risolvendo l'equazione di Lagrange, è*

$$x_3(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{2}{3}$$

Il movimento dell'uscita corrispondente è

$$y(t) = x_1(t)x_2(t) + 2x_3(t) = \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{3}$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & \alpha x_2(t) + \gamma u(t) \\ \dot{x}_2(t) = & x_1(t) + \beta x_2(t) \\ y(t) = & 3x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

A. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema, motivando brevemente le risposte:

a. è lineare o non lineare? *E' lineare perché le funzioni che compaiono nel sistema sono lineari.*
b. è statico o dinamico? *E' dinamico perché il valore assunto dalle variabili di stato nel tempo non dipende unicamente dai valori assunti dalla variabile di ingresso, ma anche dalle condizioni iniziali*
c. è strettamente proprio? *No, perché la funzione di uscita dipende dall'ingresso.*
d. è MIMO? *No perché sono presenti una sola variabile di ingresso e una sola variabile di uscita*
e. qual è l'ordine del sistema? *Il numero di variabili di stato (l'ordine) è n=2.*

B. Per quali valori dei parametri reali α, β, γ il sistema è asintoticamente stabile?

La matrice di sistema A risulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \beta\lambda - \alpha$. *Dato che il polinomio è di ordine 2, condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema è che i suoi coefficienti siano concordi di segno, cioè che* $\alpha < 0$ *e* $\beta < 0$.

C. Si ponga $\alpha = -2, \beta = -3, \gamma = 1$. Determinare la funzione di trasferimento del sistema avente ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$. Si specifichino gli zeri, i poli, il guadagno e il tipo della funzione di trasferimento ottenuta.

Le matrici di sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [3 \quad 0], D = 1$$

Applicando la formula $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ *si ottiene che*

$$G(s) = \frac{3(s+3)}{(s+1)(s+2)} + 1 = \frac{s^2 + 6s + 11}{(s+1)(s+2)}$$

a) guadagno: $\mu = 11/2$
b) tipo: *g=0*
c) poli: *s=-1,-2*
d) zeri: $-3 \pm j\sqrt{2}$

D. Si determini analiticamente l'espressione della risposta forzata dell'uscita all'ingresso $u(t) = e^{-3t}$.

Dal punto precedente si ricorda che

$$G(s) = \frac{3(s+3)}{(s+1)(s+2)} + 1$$

La trasformata di Laplace di $u(t) = e^{-3t}$ *è pari a U(s)=*$\frac{1}{s+3}$*. Da qui*

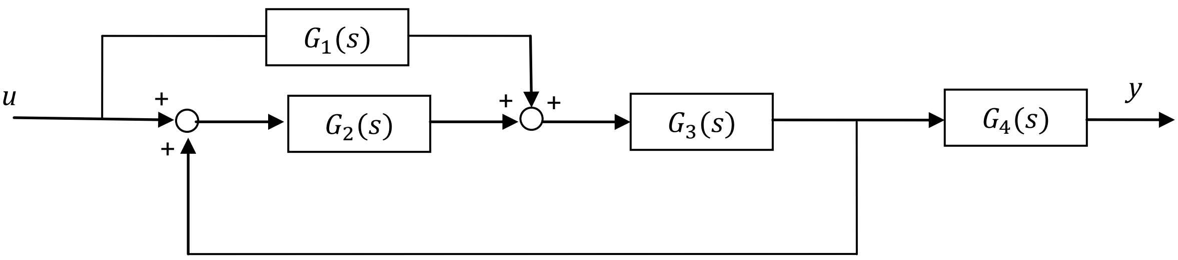
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s+3} = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

L'antitrasformata di Y(s) risulta

$$y(t) = 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente schema a blocchi:



A. Trovare la funzione di trasferimento equivalente tra l'ingresso u e l'uscita y.

La funzione di trasferimento equivalente è

$$G_{tot}(s) = \frac{G_1(s)G_3(s)G_4(s)}{1 - G_2(s)G_3(s)} + \frac{G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 - G_2(s)G_3(s)} = \frac{(G_1(s) + G_2(s))G_3(s)G_4(s)}{1 - G_2(s)G_3(s)}$$

B. Esiste nello schema a blocchi in figura una (o più) funzione di trasferimento la cui asintotica stabilità è necessaria per garantire la asintotica stabilità dell'intero sistema? Si giustifichi la risposta.

Per garantire che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile è necessario che le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_4(s)$ siano relative a sistemi asintoticamente stabili. Infatti, non essendo tali sistemi inseriti in anelli di retroazione, i loro autovalori risultano essere parte degli autovalori del sistema complessivo.

C. Si ponga:

$$G_1(s) = 0.1\,,\ G_2(s) = \frac{1}{1+s}, G_3(s) = \frac{-1}{s}, G_4(s) = \frac{1}{1+100s}$$

C.1. Si calcoli un'opportuna approssimazione ai poli dominanti della funzione di trasferimento ottenuta.

Sostituendo si ottiene

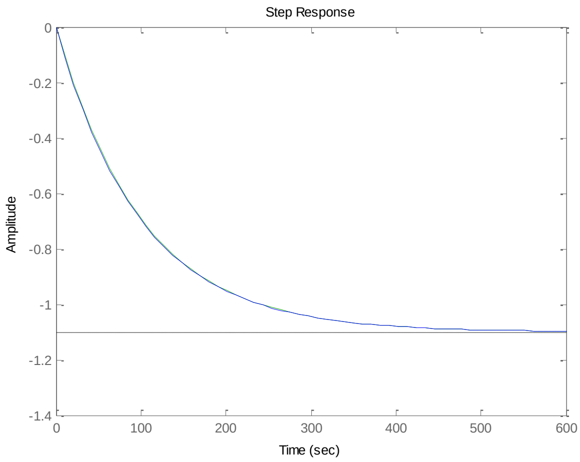
$$G_{tot}(s) = \frac{-1.1(1 + \frac{1}{11}s)}{(1 + 100s)(1 + s + s^2)}$$

Si noti che tale funzione di trasferimento presenta un polo reale in s=-1/100 e due poli complessi coniugati (con parte reale negativa) aventi pulsazione naturale $\omega_n = 1$. Inoltre lo zero del sistema è pari a s=-11. Risulta quindi che il polo dominante è s=-1/100 ed un'opportuna approssimazione di $G_{tot}(s)$ è

$$G_{appr}(s) = \frac{-1.1}{1 + 100s}$$

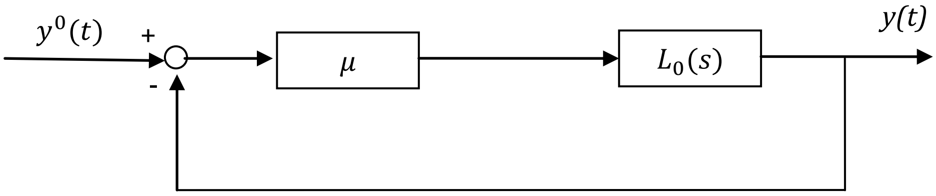
C.2. Si disegni l'andamento qualitativo della risposta allo scalino di ampiezza unitaria del sistema, giustificando il grafico disegnato.

Nel grafico sottostante si mostra l'andamento della risposta allo scalino del sistema approssimato (in blu) confrontato con l'andamento della risposta allo scalino del sistema originario (in verde).



ESERCIZIO 4

Si consideri il seguente schema di controllo retroazionato:



dove la funzione di trasferimento $L_0(s)$, che rappresenta le dinamiche di un sistema del secondo ordine, è la seguente

$$L_0(s) = \frac{1 + s/\alpha}{(1+s)^2}$$

e dove $\mu > 0$.

A. Si enunci con precisione il teorema di Bode, specificando il problema, le condizioni di applicabilità, le ipotesi e la tesi.

Si veda il libro di testo consigliato.

B. Per quali intervalli di valori dei parametri α e μ è possibile applicare il teorema di Bode? Per semplicità si faccia riferimento al diagramma asintotico (approssimato) di Bode della funzione d'anello.

Si considerino tre casi:

- $0 < \mu < 1$*: In questo caso il diagramma di Bode del modulo di* $L(s) = \mu L_0(s)$ *assume valori minori di 0dB per valori "bassi" di ω. A seconda della posizione relativa dello zero (in* $s = -\alpha$*) rispetto alla coppia di poli reali (in s=-1) il diagramma non attraversa l'asse a 0dB o attraversa l'asse a 0dB due volte. In entrambi i casi non viene soddisfatta una condizione di applicabilità del criterio di Bode (il diagramma del modulo deve attraversare una sola volta, dall'alto in basso, l'asse a 0 dB);*
- $\mu > 1$: *In questo caso il diagramma di Bode del modulo di* $L(s) = \mu L_0(s)$ *assume valori maggiori di 0dB per valori "bassi" di ω. A prescindere dalla posizione relativa dello zero (in* $s = -\alpha$*) rispetto alla coppia di poli reali (in s=-1) il diagramma attraversa l'asse a 0dB una sola volta dall'alto in basso. Inoltre il numero di poli di L(s) aventi parte reale positiva è P=0. Pertanto le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono soddisfatte;*
- $\mu = 1$: *In questo caso è necessaria l'analisi del diagramma reale (e non asintotico) del modulo di L(s), e si distinguono due casi (si considera* $\alpha \neq 0$*):*
  - $|\alpha| < 1$: *in questo caso lo zero si trova in corrispondenza di pulsazioni inferiori della coppia di poli. Dunque, il valore del modulo di L(s) sarà maggiore di 1, in corrispondenza di valori di ω (positivi) bassi. In seguito il diagramma attraversa l'asse a 0 dB una sola volta (dall'alto in basso). Dato che P=0, le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono soddisfatte;*

- $|\alpha| \geq 1$: *in questo caso lo zero si trova in corrispondenza di pulsazioni superiori della coppia di poli. Dunque, il valore del modulo di L(s) sarà minore di 1, in corrispondenza di valori di* ω *(positivi) bassi. Dato che il diagramma risulta sempre decrescente, esso non attraversa l'asse a 0 dB. Pertanto le condizioni di applicabilità del criterio di Bode non sono soddisfatte in questo caso.*

PS: l'analisi del caso $\mu = 1$*, particolarmente critico, non era richiesto in sede d'esame.*

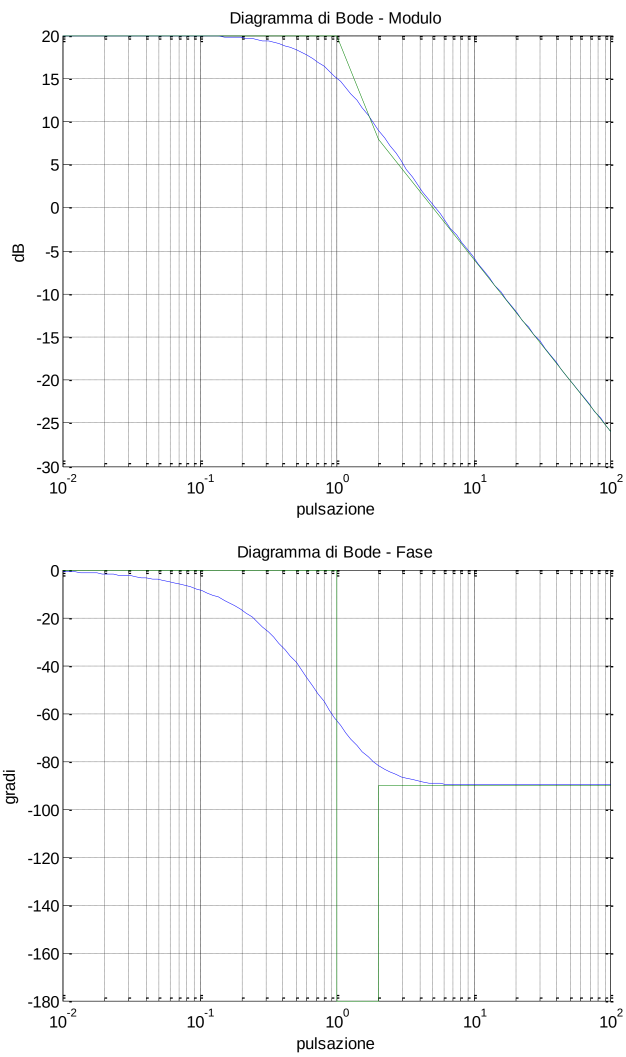
C. Si considerino i casi

a) $\mu = 10, \alpha = 2$
b) $\mu = 10, \alpha = -0.1$

Valgono le condizioni di applicabilità del teorema di Bode? Se sì, lo si applichi per valutare le proprietà di stabilità del sistema ad anello chiuso nei due casi considerati.

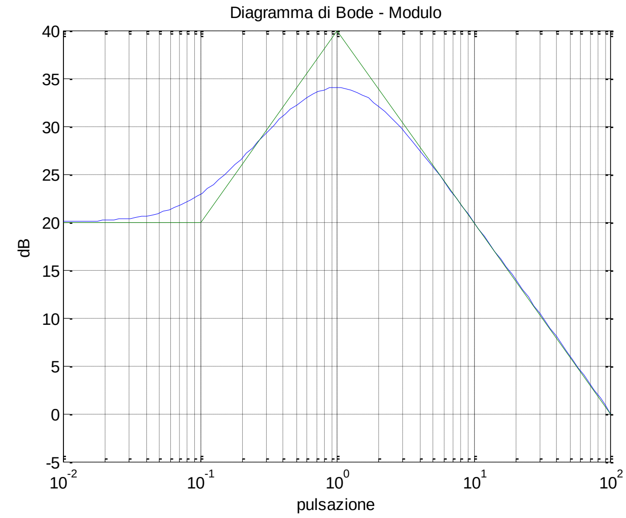
Dato che, in entrambi i casi, $\mu > 1$*, si verifica l'applicabilità del teorema di Bode.*

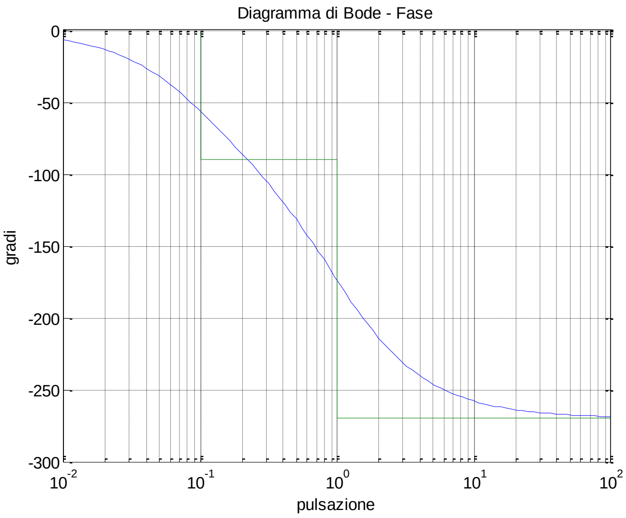
$a)$ $\mu = 10, \alpha = 2$. *I diagrammi di Bode in questo caso sono:*



Il guadagno μ è positivo e il margine di fase è circa 90°. Dal criterio di Bode si conclude che il sistema ad anello chiuso risulta asintoticamente stabile.

b) $\mu = 10, \alpha = -0.1$. *I diagrammi di Bode in questo caso sono:*

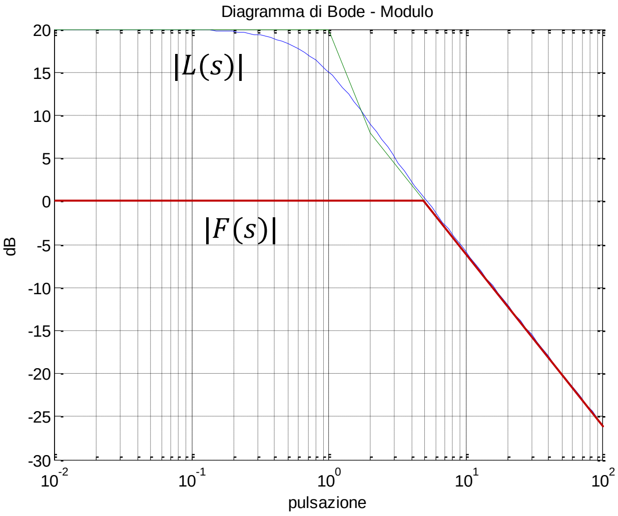




Il guadagno μ è positivo ma il margine di fase è circa -90°. Dal criterio di Bode si conclude che il sistema ad anello chiuso non è asintoticamente stabile.

D. Considerando il caso a) del punto C., si disegni il diagramma di Bode del modulo approssimato della funzione di trasferimento tra il valore di riferimento dell'uscita $y^0(t)$ e uscita $y(t)$.

Il diagramma approssimato del modulo della funzione di sensitività complementare F(s) si ricava dal diagramma della funzione ad anello:



dove il guadagno μ_F di F(s) è, in realtà, minore di 1, dato che il tipo di L(s) è zero. Infatti:

$$\mu_F = \frac{\mu_L}{1 + \mu_L}$$

dove $\mu_L = 10$ è il guadagno di L(s).

E. Considerando il caso a) del punto C., si supponga che $y^o(t) = \sin(0.1t)$. Si determini il valore della ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a regime.

In base al teorema della risposta in frequenza si ottiene che l'ampiezza della sinusoide richiesta è pari a $|F(j0.1)| \cdot 1$. Dal grafico al punto precedente si evince che $|F(j0.1)| = \mu_F = 10/11$.