INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME E SOLUZIONI

03 settembre 2012

Anno Accademico 2011/2012

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + 2x^2 - x + xu \\ y &= 2x \end{aligned}$$

A. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema, motivando brevemente le risposte:

a. è lineare o non lineare? *Non lineare, dato che la funzione f(x,u) è non lineare.*
b. è statico o dinamico? *Dinamico (il valore assunto da x(t) dipende da x(0)).*
c. è strettamente proprio? *Sì (la funzione d'uscita non dipende dall'ingresso u(t))*
d. è MIMO? *No, è SISO (1 variabile di ingresso – 1 variabile di uscita).*
e. qual è l'ordine del sistema? *n=1.*

B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$.

Si definiscono $\delta x = x - \bar{x}$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$, dove $\bar{y}$ è il valore dell'uscita in corrispondenza della condizione di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$. Il sistema linearizzato attorno a $(\bar{x}, \bar{u})$ risulta:

$$\begin{aligned} \dot{\delta x} &= (-3\bar{x}^2 + 4\bar{x} - 1 + \bar{u})\delta x + \bar{x}\delta u \\ \delta y &= 2\delta x \end{aligned}$$

C. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$.

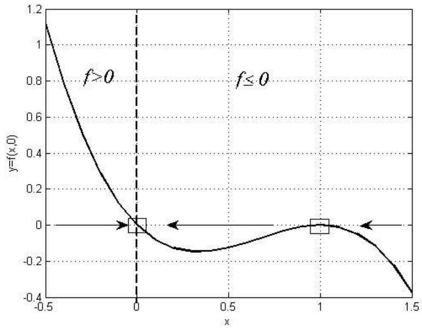
Detta f(x,u)=$-x^3 + 2x^2 - x + xu$, le condizioni di equilibrio in corrispondenza di $\bar{u} = 0$ sono le soluzioni di f(x,0)=$-x^3 + 2x^2 - x = -x(x-1)^2 = 0$, cioè $\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = 1$. Le due possibili condizioni di equilibrio sono $(\bar{x}, \bar{u})_1 = (0,0)$ e $(\bar{x}, \bar{u})_2 = (1,0)$.

D. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati al punto precedente. Nel caso il metodo della linearizzazione non fornisca risultati si applichi il metodo grafico.

Si definisce $A(\bar{x}, \bar{u}) = -3\bar{x}^2 + 4\bar{x} - 1 + \bar{u}$.

Per quanto riguarda $(\bar{x}, \bar{u})_1 = (0,0)$, $A(0,0) = -1 < 0$. L'equilibrio risulta asintoticamente stabile.

Per quanto riguarda $(\bar{x}, \bar{u})_2 = (1,0)$, $A(1,0) = 0$. Non è possibile, usando il metodo della linearizzazione, trarre conclusioni a proposito delle proprietà di stabilità di questo equilibrio. Si prova quindi ad analizzare il sistema usando il metodo grafico. Si analizza perciò la funzione $y = f(x,0) = -x(x-1)^2$ (vi veda la figura sottostante). Si conclude facilmente che, mentre $(\bar{x}, \bar{u})_1$ è (localmente) asintoticamente stabile, l'equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})_2$ è instabile.



E. Nel caso in cui il sistema sia controllato attraverso una legge di controllo in retroazione $u(t) = ky(t)$, si determini l'intervallo di valori del parametro k che garantiscono l'esistenza di un unico punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

Ponendo $u(t) = ky(t)$*, si ottiene che l'evoluzione del sistema è descritta da:*

$$\dot{x} = -x(x^2 - 2(1+k)x + 1)$$

L'equilibrio risulta essere unico (in $\bar{x} = 0$*) ed asintoticamente stabile se il parametro* k *è scelto in modo tale che* $(x^2 - 2(1+k)x + 1) > 0$*. Ciò si verifica se* $-2 < k < 0$*.*

ESERCIZIO 2

Si considerino i sistemi S_1 e S_2, le cui dinamiche sono descritte dai seguenti modelli:

$$S_1\colon\begin{cases}\dot{x}_1 = & -0.1x_1 + u_1 \\ y_1 = & 0.1x_1\end{cases}, \quad S_2\colon\begin{cases}\dot{x}_2 = & 0.1x_2 + u_2 \\ y_2 = & 0.1x_2\end{cases}$$

A. Si studino le proprietà di stabilità dei sistemi S_1 e S_2 e si scrivano le funzioni di trasferimento tra u_1 e y_1, e tra u_2 e y_2.

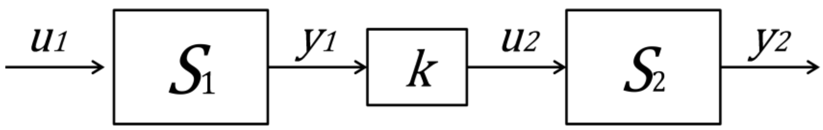
S_1 *è asintoticamente stabile. Infatti il suo autovalore è* $\lambda = -0.1 < 0$*. La funzione di trasferimento è:*

$$G_1(s) = \frac{0.1}{s + 0.1}$$

S_2 *è instabile. Infatti il suo autovalore è* $\lambda = 0.1 > 0$*. La sua funzione di trasferimento è:*

$$G_2(s) = \frac{0.1}{s - 0.1}$$

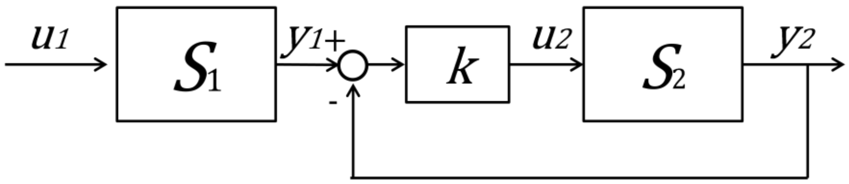
B. Si studino le proprietà di stabilità del sistema interconnesso in figura al variare del valore del guadagno k. Si scriva inoltre la funzione di trasferimento tra u_1 e y_2.



Dato che il sistema è ricavato come interconnessione in serie dei sistemi S_1 *e* S_2*, risulta essere instabile a causa dell'instabilità di* S_2*. La funzione di trasferimento tra* u_1 *e* y_2 è:

$$G_S(s) = \frac{0.01k}{(s+0.1)(s-0.1)}$$

C. Si studino le proprietà di stabilità del sistema interconnesso in figura al variare del valore del guadagno *k*. Si scriva inoltre la funzione di trasferimento tra u_1 e y_2.



Si ottiene, in spazio di stato, che il sistema complessivo è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0.1x_1 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= 0.1kx_1 + 0.1(1-k)x_2 \\ y &= 0.1x_2 \end{aligned}$$

Il sistema ha autovalori $\lambda_1 = -0.1 < 0$ *e* $\lambda_2 = -0.1(k-1)$*, che risulta negativo se e solo se k>1. Quindi:*

- *k<1: il sistema ad anello chiuso è instabile.*
- *k=1: il sistema è semplicemente stabile.*
- *k>1: il sistema è asintoticamente stabile.*

D. Considerando il sistema studiato al punto precedente si calcolino, se possibile, i valori del parametro *k* che garantiscono (oltre all'asintotica stabilità del sistema) che, a fronte di un valore costante della variabile di ingresso $u_1(t) = \bar{u}$, a transitorio esaurito si abbia che $\frac{|y_2(t)-\bar{u}|}{|\bar{u}|} < 0.01$.

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$G_{cl}(s) = \frac{0.01k}{(s+0.1)(s+0.1(k-1))}$$

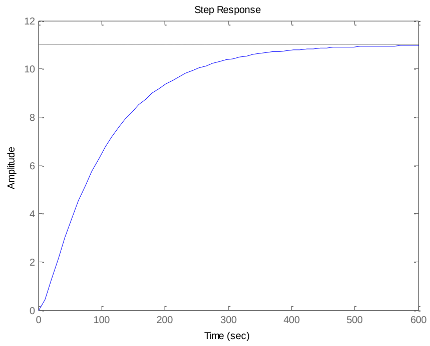
Il guadagno del sistema risulta essere $\mu = \frac{k}{k-1}$*. Affinchè la condizione* $\frac{|y_2(t)-\bar{u}|}{|\bar{u}|} < 0.01$ *sia soddisfatta, è necessario che* $|1-\mu| = \frac{1}{k-1} < 0.01$*, cioè che k>101.*

E. Considerando il sistema studiato al punto C si calcolino, se possibile, i valori del parametro *k* che garantiscono (oltre all'asintotica stabilità del sistema) che il tempo di assestamento del sistema sia minore di 1 unità di tempo. Si commenti il risultato.

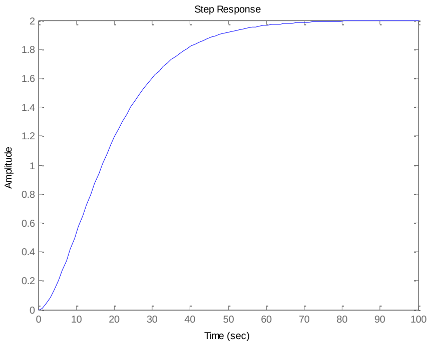
La costante di tempo associata al sistema è $\tau \geq 10$ *(costante di tempo associata al polo s=-0.1), per cui non è mai possibile rendere il tempo di assestamento del sistema complessivo minore di circa 50* $(\approx 5\tau)$ *unità di tempo.*

F. Si disegni qualitativamente la risposta allo scalino di ampiezza unitaria del sistema studiato al punto C, per i seguenti tre valori di *k*:

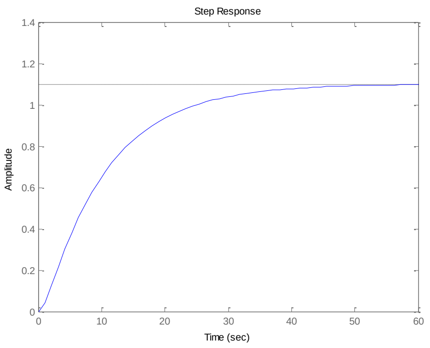
- k=1.1


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
2
4
6
8
10
12
100
200
300
400
500
600

- k=2


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

- k=11


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
10
20
30
40
50
60

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & -4x_2(t) + 4u(t) \\ \dot{x}_2(t) = & x_1(t) - 4x_2(t) + 4u(t) \\ y(t) = & 0.1x_2(t) \end{cases}$$

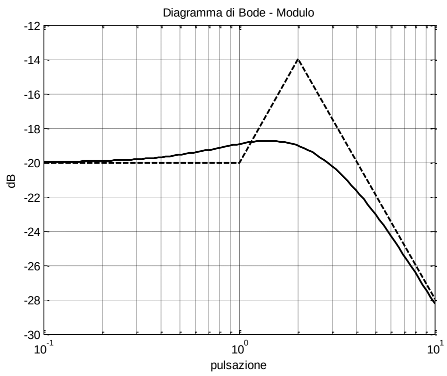
A. Determinare la funzione di trasferimento del sistema avente ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$. Si specifichino gli zeri, i poli, il guadagno e il tipo della funzione di trasferimento ottenuta.

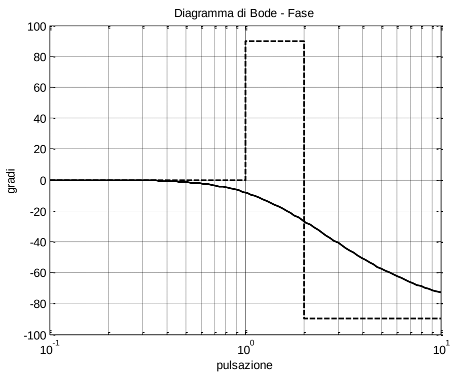
Si ottiene:

$$G(s) = 0.1\frac{s+1}{(1+s/2)^2}$$

- *zeri: s=-1.*
- *poli: s=-2 (doppio polo).*
- *guadagno:* $\mu = 0.1$.
- *tipo: g=0.*

B. Si traccino i diagrammi di Bode di modulo e fase asintotici della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento G(s).





C. Si calcoli il movimento forzato dell'uscita rispetto all'ingresso $u(t) = e^{-t}$.

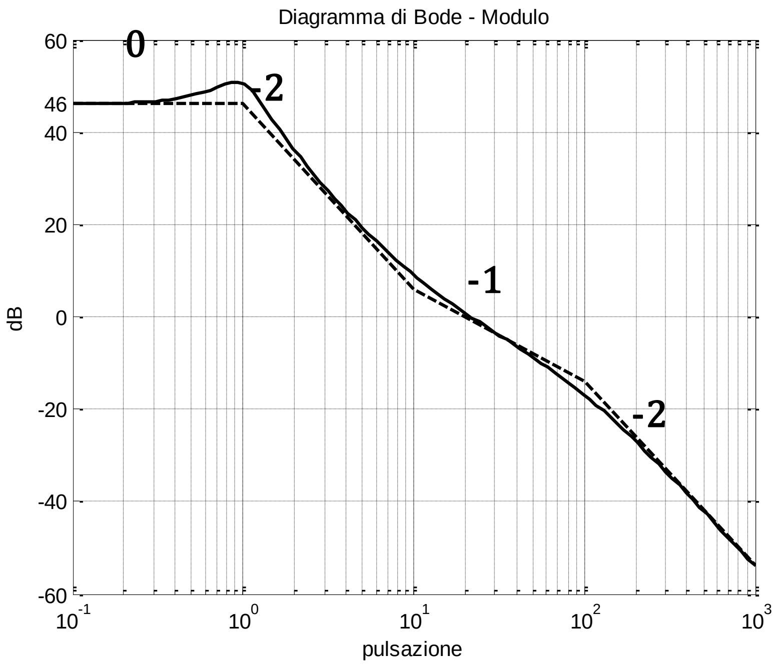
Il movimento forzato corrispondente ha trasformata di Laplace $Y(s) = \frac{0.4}{(s+2)^2}$. *Cioè* $y(t) = 0.4te^{-2t}, t \geq 0$.

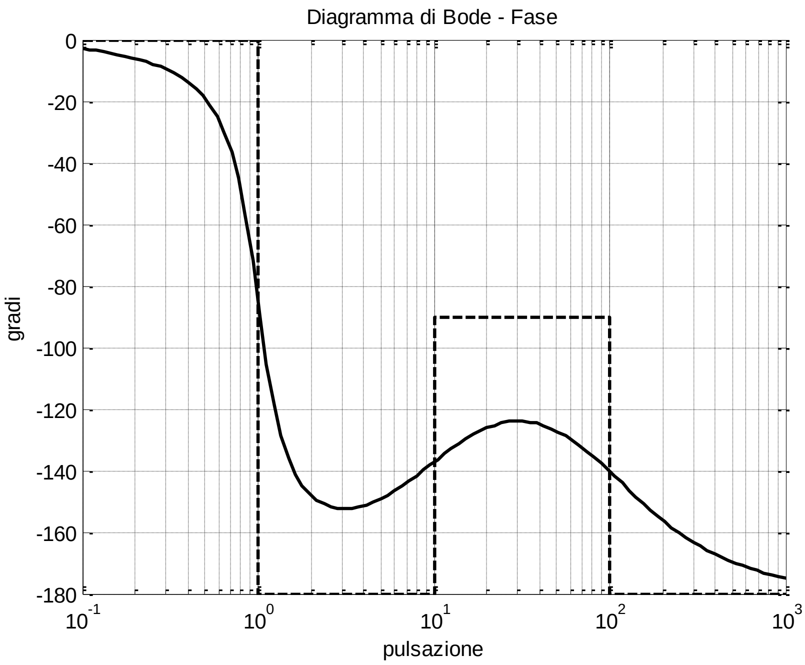
D. Si calcoli l'ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a transitorio esaurito corrispondente all'ingresso $u(t) = \sin(0.1t)$.

Osservando il diagramma di Bode del modulo in figura risulta chiaro che l'amplificazione ad un segnale sinusoidale di pulsazione 0.1 rad/s è 0.1.

ESERCIZIO 4

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento G(s). In figura sono rappresentati i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a G(s).



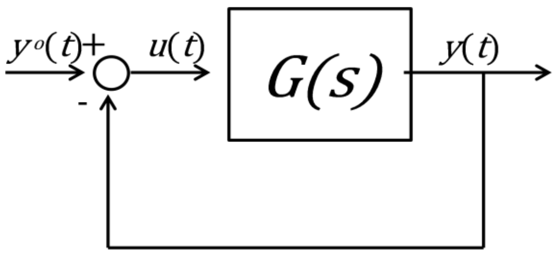


A. Rispondere alle seguenti domande relative al sistema (ad <u>anello aperto</u>) avente funzione di trasferimento G(s), giustificando brevemente la risposta:

- Il sistema è asintoticamente stabile? *Sì, in corrispondenza dei poli (sono evidenti nel diagramma del modulo 3 punti di cambiamento di pendenza negativo) lo sfasamento risulta negativo (la loro parte reale è negativa).*
- Il sistema è strettamente proprio? *Sì, questo si evince dal fatto che per* $\omega > 100$ *il diagramma del modulo è decrescente (n. poli>n.zeri).*
- Qual è il tipo g del sistema? *g=0. Si evince dalla pendenza nulla per ω "basso".*
- Qual è il valore guadagno μ (o il guadagno generalizzato, nel caso $g \neq 0$) del sistema? $\mu = 200 (= 46\ dB)$.
- In quante unità di tempo (circa) la risposta allo scalino si assesta al valore di regime?
- Qual è (approssimativamente) il valore della sovraelongazione percentuale della risposta allo scalino del sistema (si ricordi che per sistemi del II ordine con poli complessi coniugati la formula della sovraelongazione percentuale è $S = 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$)?

Per rispondere alle ultime due domande si noti che i poli dominanti sono la coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ *rad/s. Ad essi corrisponde un picco nel diagramma del modulo (rispetto al valore del guadagno) di 6dB (=2 in scala lineare). Perciò* $\frac{1}{2\xi} = 2$, *cioè* $\xi = 0.25$. *La costante di tempo risulta* $\tau = 1/(\xi\omega_n)$ *=4 s. Applicando la formula precedente si ottiene che S=44% circa.*

B. Il sistema dinamico avente funzione di trasferimento G(s) viene retroazionato secondo lo schema in figura.



B.1 Rispondere alle seguenti domande relative al sistema (ad <u>anello chiuso</u>) in figura:

- Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile? *Per rispondere a questa domanda si noti che L(s)=G(s) dallo schema. Da quanto visto dal punto precedente P=0 (G(s) è asintoticamente stabile) e, osservando il grafico del modulo, esso attraversa una sola volta l'asse a 0dB. Questo permette di applicare il criterio di Bode. Il guadagno è* $\mu_G > 0$ *(perché lo sfasamento di G(s) iniziale è 0°), e il margine di fase è* $\varphi_m \approx 55° > 0$. *Il sistema ad anello chiuso risulta essere asintoticamente stabile.*
- Il sistema retroazionato è strettamente proprio? *Sì (dal punto A).*
- Qual è il tipo g del sistema retroazionato? *Il tipo del sistema ad anello chiuso è g=0 (è asintoticamente stabile).*
- Qual è il valore guadagno μ_F del sistema avente come ingresso $y^o(t)$ e come uscita $y(t)$? *Dato che il tipo di L(s) è 0,* $\mu_F = \frac{\mu_G}{\mu_G+1} = \frac{200}{201}$.

- In quante unità di tempo (circa) la risposta forzata allo scalino nel valore di $y^o(t)$ si assesta al valore di regime? *La pulsazione di taglio risulta* $\omega_c = 20$ *rad/s. Dato che* $\varphi_m \approx 55° < 75°$ *il modello approssimato ai poli dominanti prevede l'esistenza di due poli complessi coniugati con smorzamento circa pari a* $\xi \approx \frac{\varphi_m}{100} = 0.55$*. La costante di tempo legata a questi poli complessi coniugati risulta essere* $\tau = \frac{1}{\xi\omega_c} = 0.09$ *s.*
- Qual è (approssimativamente) il valore della sovraelongazione percentuale della risposta forzata allo scalino in $y^o(t)$ del sistema retroazionato? *Usando la formula precedente si ottiene S=12.6% circa.*

B.2. Determinare la funzione di trasferimento dell'approssimazione a polo dominante del sistema retroazionato.

Da quanto visto precedentemente,

$$F(s) = \frac{200/201}{1 + \frac{1.1}{20}s + \frac{1}{400}s^2}$$

B.3. Di quale fattore vengono amplificati i segnali sinusoidali a pulsazione inferiore a 1 rad/s?

Tali segnali vengono amplificati del fattore $|F(j)| \approx 200/201$*.*