INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME E SOLUZIONI

19 settembre 2012

Anno Accademico 2011/2012

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathrm{u(t)} \cdot \cos(x(t)) - 1 \\ y(t) &= 2x(t) \end{aligned}$$

A. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema, motivando brevemente le risposte:

a. è lineare o non lineare? *Il sistema è non lineare: f(x,u) è non lineare.*
b. è statico o dinamico? *Il sistema è dinamico.*
c. è strettamente proprio? *Il sistema è strettamente proprio.*
d. è MIMO? No. *Il sistema è SISO.*
e. qual è l'ordine del sistema? *L'ordine è n=1.*

B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$.

Si definiscono $\delta x = x - \bar{x}$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$, *dove* $\bar{y}$ *è il valore dell'uscita in corrispondenza della condizione di equilibrio* $(\bar{x}, \bar{u})$. *Il sistema linearizzato attorno a* $(\bar{x}, \bar{u})$ *risulta:*

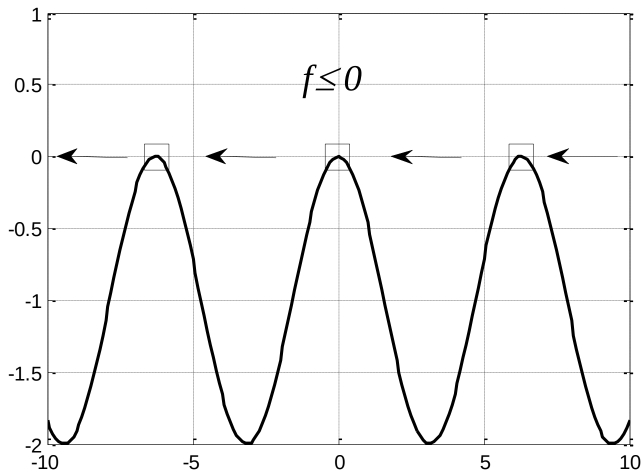
$$\begin{aligned} \dot{\delta x} &= (-\bar{u} \sin\bar{x}\,)\delta x + (cos\bar{x})\delta u \\ \delta y &= 2\delta x \end{aligned}$$

C. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.

Detta f(x,u)= $\mathrm{u(t)} \cdot \cos(x(t)) - 1$, *le condizioni di equilibrio in corrispondenza di* $\bar{\mathrm{u}} = 1$ *sono le soluzioni di f(x,1)=* $\cos(x) - 1 = 0$, *cioè* $\bar{x} = 2k\pi$. *Il numero di condizioni di equilibrio è pertanto infinito.*

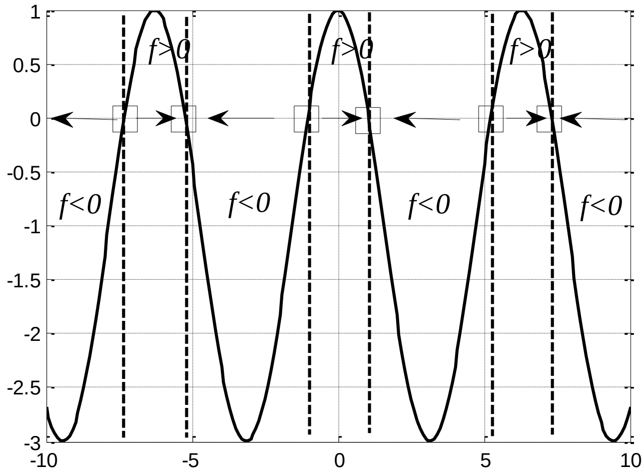
D. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati al punto precedente. Nel caso il metodo della linearizzazione non fornisca risultati si applichi il metodo grafico.

Si definisce $A(\bar{x}, \bar{u}) = -\bar{u} \sin\bar{x}$. *Negli equilibri trovati* $\sin\bar{x} = 0$. *Perciò* $A(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. *Non è possibile, usando il metodo della linearizzazione, trarre conclusioni a proposito delle proprietà di stabilità di questi equilibri. Si prova quindi ad analizzare il sistema usando il metodo grafico. Si analizza perciò la funzione* $y = f(x, 1) = \cos(x) - 1$ *(si veda la figura sottostante). Si conclude facilmente che gli equilibri trovati sono instabili.*



E. Si determinino i valori costanti della variabile di ingresso u(t) che garantiscano l'esistenza di (eventualmente più di uno) equilibri asintoticamente stabili.

Come è facile capire osservando la figura precedente, e considerando l'ingresso u(t) (se costante) come un fattore amplificante la sinusoide, se $|u| > 1$ *il numero di punti di intersezione (all'interno di un periodo) della funzione con l'asse y=0 è due: uno di questi è asintoticamente stabile, mentre l'altro risulta instabile. Ad esempio, con u=2, si ottiene il grafico in figura sottostante.*



ESERCIZIO 2

Si considerino i sistemi S_1 e S_2, le cui dinamiche sono descritte dai seguenti modelli:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_1(t) + u_1(t) \\ y_1(t) = & x_1(t) \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} \dot{x}_2(t) = & u_1(t) - 2u_2(t) \\ y_2(t) = & x_2(t) \end{cases}$$

A. Si studino le proprietà di stabilità dei sistemi S_1 e S_2 e si scrivano le funzioni di trasferimento tra u_1 e y_1, e tra u_2 e y_2.

S_1 è instabile. Infatti il suo auto valore è $\lambda = 1 > 0$*. La funzione di trasferimento è:*

$$G_1(s) = \frac{1}{s-1}$$

S_2 è (semplicemente) stabile. Infatti il suo auto valore è $\lambda = 0$*. E' un sistema dotato di due ingressi e una uscita. La funzione di trasferimento, richiesta (tra* u_2 *e* y_2*) è:*

$$G_2(s) = -\frac{2}{s}$$

B. Si studino le proprietà di stabilità del sistema interconnesso, ottenuto ponendo $u_1(t) = -k_1 y_1(t)$ e $u_2(t) = -k_2 y_1(t)$, al variare dei parametri k_1 e k_2.

Si ponga $u_1(t) = -k_1 x_1(t)$ e $u_2(t) = -k_2 x_1(t)$*. Si ottiene il sistema complessivo:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1-k_1)x_1 \\ \dot{x}_2 &= (2k_2 - k_1)x_1 \end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-k_1 & 0\\2k_2-k_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice di sistema sono $\lambda_1=1-k_1$ e $\lambda_2=0$. Perciò

- *se $k_1>1$ il sistema è semplicemente stabile*
- *se $k_1<1$ il sistema è instabile*
- *se $k_1=1$ l'autovalore è $\lambda_1=0$ con molteplicità algebrica $n_1=2$. Si possono riscontrare due casi:*
    - *se $k_2=0.5$ la molteplicità geometrica dell'autovalore è $r_1=2$. Il sistema risulta essere semplicemente stabile.*
    - *se $k_2\neq 0.5$ la molteplicità geometrica dell'autovalore è $r_1=1$. Il sistema risulta essere instabile.*

C. Si studino le proprietà di stabilità del sistema interconnesso, ottenuto ponendo $u_1(t)=u(t)-k_1y_1(t)$ e $u_2(t)=-k_2y_2(t)$, al variare dei parametri k_1 e k_2.

Si ponga $u_1(t)=u(t)-k_1x_1(t)$ e $u_2(t)=-k_2x_2(t)$. Si ottiene il sistema complessivo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (1-k_1)x_1+u\\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1+2k_2x_2+u\end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-k_1 & 0\\-k_1 & 2k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

Gli autovalori della matrice di sistema sono $\lambda_1=1-k_1$ e $\lambda_2=2k_2$. Perciò:

- *Se $k_1>1$ e $k_2<0$: il sistema è asintoticamente stabile.*
- *Se $k_1<1$ o $k_2>0$: il sistema è instabile.*
- *Se $k_1>1$ e $k_2=0$: il sistema è (semplicemente) stabile.*
- *Se $k_1=1$ e $k_2<0$: il sistema è (semplicemente) stabile.*
- *Se $k_1=1$ e $k_2=0$: il* sistema è instabile (autovalore $\lambda_1=0$ *con molteplicità algebrica* $n_1=2$ *e molteplicità geometrica* $r_1=1$).

D. Nel caso considerato al punto C., si scriva la funzione di trasferimento del sistema avente come ingresso $u(t)$ e come uscita $y(t)=y_2(t)$, ottenuta ponendo $k_1=2$ e $k_2=-5$.

La funzione di trasferimento cercata è

$$G(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s+10)}$$

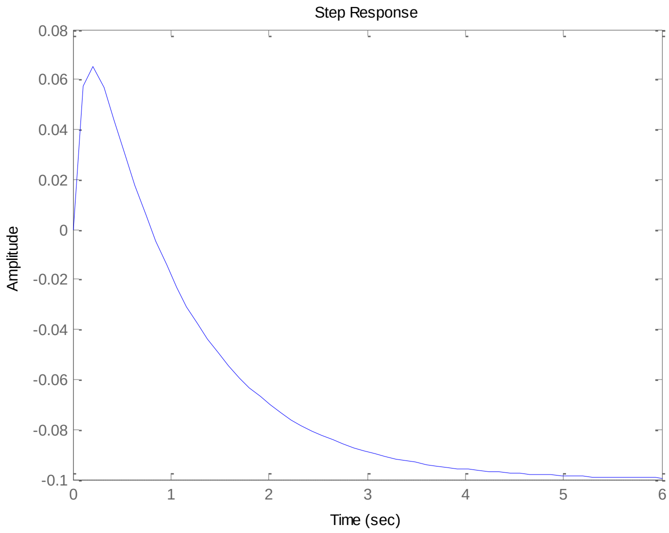
E. Si disegni qualitativamente la risposta allo scalino $u(t)=sca(t)$ del sistema studiato al punto D.

Per tracciare qualitativamente la risposta allo scalino, si tenga conto delle seguenti osservazioni:

- *il sistema è asintoticamente stabile.*
- *il guadagno della funzione di trasferimento è -0.1.*
- *il polo dominante ha costante di tempo $\tau=1$ unità di tempo.*

- *si verifica il fenomeno della risposta inversa (a causa dello zero con parte reale positiva).*

Si veda il grafico sottostante.



ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & -x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = & x_1(t) \\ y(t) = & 0.1x_2(t) \end{cases}$$

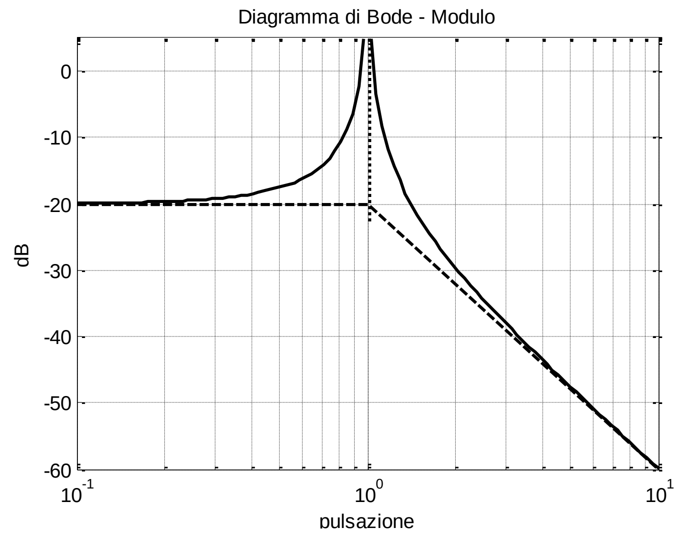
A. Determinare la funzione di trasferimento del sistema avente ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$. Si specifichino gli zeri, i poli, il guadagno e il tipo della funzione di trasferimento ottenuta.

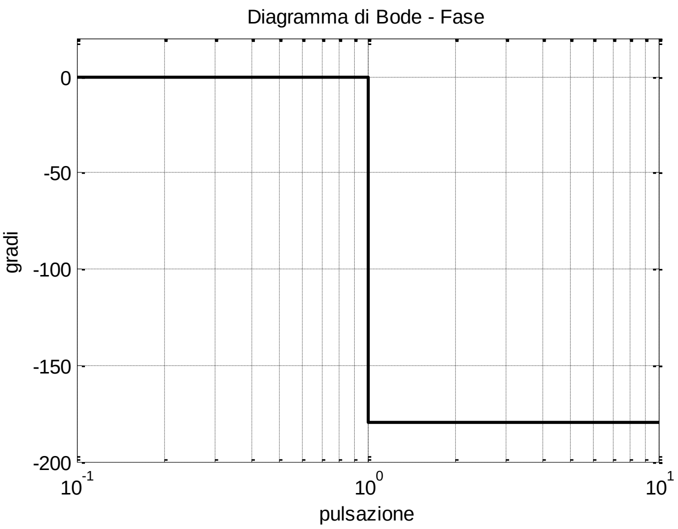
La funzione di trasferimento cercata è

$$G(s) = \frac{0.1}{s^2 + 1}$$

- *zeri: non presenti.*
- *poli:* $s = \pm j$.
- *guadagno:* $\mu = 1$.
- *tipo: g=0.*

B. Si disegnino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento ottenuta.





C. Si calcoli il movimento libero dell'uscita partendo dalla condizione iniziale $\left(x_1(0), x_2(0)\right) = (1,0)$.

Dato che il movimento libero dell'uscita del sistema è combinazione lineare di modi del sistema, risulta $y(t) = \gamma_1 e^{jt} + \gamma_2 e^{-jt}$. *Si ricordi che*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = [0\ 0.1]$$

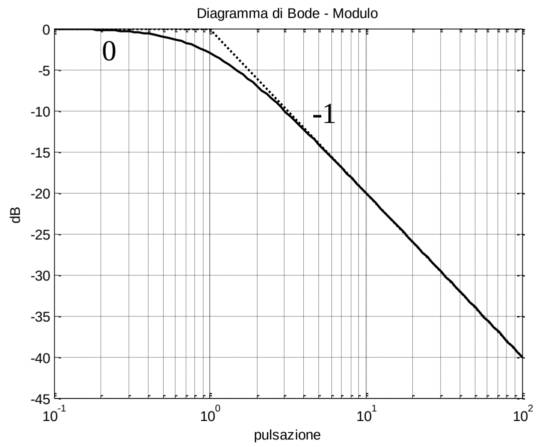
Si calcola che

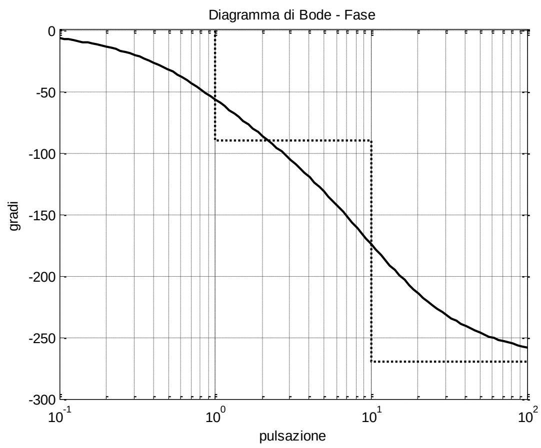
- $y(0) = \gamma_1 + \gamma_2 = Cx_0 = 0$
- $\dot{y}(0) = j\,\gamma_1 - j\gamma_2 = CAx_0 = 0.1$

Da qui si ottiene che $\gamma_1 = -j0.05, \gamma_2 = j0.05$, *e quindi* $y(t) = 0.1\sin(t)$.

ESERCIZIO 4

Si consideri un sistema dinamico di ordine 2 con funzione di trasferimento G(s). In figura sono rappresentati i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a G(s).





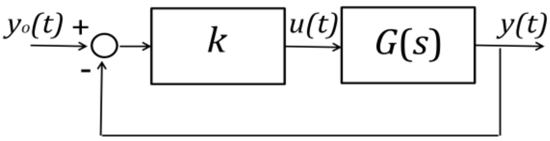
A. Rispondere alle seguenti domande relative al sistema (ad <u>anello aperto</u>) avente funzione di trasferimento G(s), giustificando brevemente la risposta:

Prima di tutto si noti che la funzione di trasferimento illustrata nei diagrammi corrisponde a

$$G(s) = -\frac{(s-10)}{(s+10)(s+1)}$$

- Il sistema è asintoticamente stabile? Sì*, i poli hanno parte reale negativa.*
- Il sistema è strettamente proprio? *Sì: n. zeri<n. poli.*
- Qual è il tipo g del sistema? *g=0: mancano singolarità nell'origine.*
- Qual è il valore guadagno μ (o il guadagno generalizzato, nel caso $g \neq 0$) del sistema? μ=1.
- In quante unità di tempo (circa) la risposta allo scalino si assesta al valore di regime? *Il polo dominante ha costante di tempo* $\tau = 1$ *unità di tempo.*
- Il sistema presenta poli e/o zeri? Se sì, si individuino i valori di tali singolarità.
    - *Poli: s=-1, -10.*
    - *Zeri: s=10.*

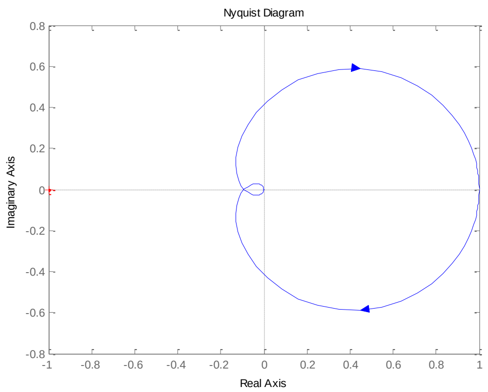
B. Il sistema dinamico avente funzione di trasferimento G(s) viene retroazionato secondo lo schema in figura, dove si assume $k > 0$.



B.1 Rispondere alle seguenti domande relative al sistema (ad <u>anello chiuso</u>) in figura:

- Si calcoli l'intervallo di valori del parametro k che garantiscono l'asintotica stabilità del sistema retroazionato.

Si osservi il diagramma di Nyquist di G(s) nella figura sottostante, considerando che il numero di poli instabili di G(s) è P=0:



Il punto di attraversamento del semiasse reale negativo da parte del diagramma è il punto -0.1. Questo implica che, se 0<k<10, il diagramma non circonda il punto -1 (cioè Z=0), garantendo asintotica stabilità per il criterio di Nyquist. Analogamente, per k≥10 il sistema risulta non asintoticamente stabile.

Considerando il caso k=3:

- Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile? *Sì, per il risultato esposto al punto precedente.*
- Il sistema retroazionato è strettamente proprio? *Sì (dal p.to A)*
- Qual è il tipo g del sistema retroazionato? *Il tipo del sistema ad anello chiuso è g=0 (è asintoticamente stabile).*
- Qual è il valore guadagno μ_F del sistema avente come ingresso $y_o(t)$ e come uscita $y(t)$? *Dato che il tipo di L(s) è 0,* $\mu_F = \frac{\mu_G}{\mu_G+1} = \frac{3}{4}$.
- In quante unità di tempo (circa) la risposta forzata allo scalino nel valore di $y_o(t)$ si assesta al valore di regime? *Con k=3 la pulsazione di taglio risulta* $\omega_c \approx 3$ *rad/s. Dato che* $\varphi_m \approx 80° > 75°$ *il modello approssimato ai poli dominanti prevede l'esistenza di un polo reale. La costante di tempo ad esso legata risulta essere* $\tau = \frac{1}{\omega_c} = 0.33$ *unità di tempo.*

B.2. Determinare la funzione di trasferimento dell'approssimazione a polo dominante del sistema retroazionato.

Da quanto visto precedentemente,

$$F(s) = \frac{3/4}{1 + \frac{1}{3}s}$$

B.3. Di quale fattore vengono amplificati i segnali sinusoidali a pulsazione inferiore a 1 rad/s?

Dato che $1<\omega_c$, *tale fattore di amplificazione corrisponde a* $\mu_F = \frac{3}{4}$.