INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME E SOLUZIONI

14 febbraio 2013

Anno Accademico 2011/2012

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -4x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (1 - x_2(t))x_2(t) \\ y &= x_1^2(t) + u(t) \end{aligned}$$

A. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema, motivando brevemente le risposte:

a. è lineare o non lineare? *Il sistema è non lineare: f(x,u) è non lineare.*
b. è statico o dinamico? *Il sistema è dinamico.*
c. è strettamente proprio? *Il sistema è proprio NON strettamente: la funzione d'uscita dipende dall'ingresso u(t).*
d. è MIMO? *No, è SISO, single-input-single output.*
e. qual è l'ordine del sistema? *L'ordine è n=2.*

B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$.

Si definiscono $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$*,* $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$*,* $\delta u = u - \bar{u}$*,* $\delta y = y - \bar{y}$*, dove* $\bar{y}$ *è il valore dell'uscita in corrispondenza della condizione di equilibrio* $(\bar{x}, \bar{u}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$*. Il sistema linearizzato attorno a* $(\bar{x}, \bar{u})$ *risulta:*

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= -4\bar{x}_2\delta x_1 + (-4\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2\bar{u})\delta x_2 + \bar{x}_2{}^2\delta u \\ \delta \dot{x}_2 &= (1 - 2\bar{x}_2)\delta x_2 \\ \delta y &= 2\bar{x}_1\delta x_1 + \delta u \end{aligned}$$

C. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.

Risolvendo $f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 1) = (1 - \bar{x}_2)\bar{x}_2 = 0$ *si ottengono due possibili soluzioni:* $\bar{x}_2 = 0$ *oppure* $\bar{x}_2 = 1$.

Se $\bar{x}_2 = 0$*, risolvendo* $f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 1) = -4\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2{}^2 = 0$ *si ottiene che il valore di* $\bar{x}_1$ *è indeterminato (infinite possibili soluzioni).*

Se $\bar{x}_2 = 1$*, risolvendo* $f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 1) = -4\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2{}^2 = 0$ *si ottiene* $\bar{x}_1 = 1/4$*.*

D. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati al punto precedente.

La matrice di sistema del modello linearizzato al punto B. è:

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -4\bar{x}_2 & -4\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2\bar{u} \\ 0 & 1 - 2\bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

Si ottiene che, in corrispondenza degli equilibri corrispondenti a $\bar{x}_2 = 0$*:*

$$A(\bar{x}_1, 0{,}1) = \begin{bmatrix} 0 & -4\bar{x}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono 0 e 1 (equilibri instabili).

In corrispondenza degli equilibri corrispondenti a $\bar{x}_2 = 1$*:*

$$A(1/4,1,1) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono -4 e -1 (equilibrio asintoticamente stabile).

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & -\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = & -\gamma x_1(t) + u(t) \\ y(t) = & x_1(t) - u(t) \end{cases}$$

A. Analizzare le proprietà di stabilità del sistema al variare dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta, \gamma > 0$.

La matrice di sistema è

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \gamma\beta$. *Dato che i dati del problema prevedono che* $\beta, \gamma > 0$*, le diverse soluzioni possibili sono le seguenti:*

- $\alpha < 0$*: sistema instabile*
- $\alpha = 0$: *sistema stabile semplicemente*
- $\alpha > 0$*: sistema asintoticamente stabile*

B. Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

Si ottiene, attraverso la formula.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{s^2 + \alpha s + \gamma\beta} - 1 = -\frac{s^2 + \alpha s + (\gamma - 1)\beta}{s^2 + \alpha s + \gamma\beta}$$

C. Si determini <u>la risposta libera dell'uscita </u>del sistema (partendo dalla condizione iniziale $(x_1(0), x_2(0)) = (1,0)$) nel caso in cui $\alpha = 0,\ \beta = \gamma = 1$.

Dato che il movimento libero dell'uscita del sistema è combinazione lineare di modi del sistema, risulta $y(t) = \gamma_1 e^{jt} + \gamma_2 e^{-jt}$. *Si ricordi che*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = [1\ 0]$$

Si calcola che

- *y(0)*$= \gamma_1 + \gamma_2 = Cx_0 = 1$
- $\dot{y}(0) = j\,\gamma_1 - j\gamma_2 = CAx_0 = 0$

Da qui si ottiene che $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$*, e quindi* $y(t) = \cos(t)$.

D. Nel caso $\alpha = \beta = \gamma = 1$ si determinino zeri, poli, guadagno generalizzato e tipo della funzione di trasferimento ottenuta al punto B.

Ponendo $\alpha = \beta = \gamma = 1$ *si ottiene:*

$$G(s) = -\frac{s(s+1)}{s^2+s+1}$$

- *zeri: s=0,-1.*
- *poli:* $s = -1/2 \pm j\sqrt{3}/2$.
- *guadagno generalizzato:* $\mu = -1$.
- *tipo: g=-1.*

E. Si tracci qualitativamente la risposta forzata dell'uscita allo scalino di ampiezza unitaria $u(t) = sca(t)$ usando gli strumenti forniti dal teorema del valore iniziale e finale.

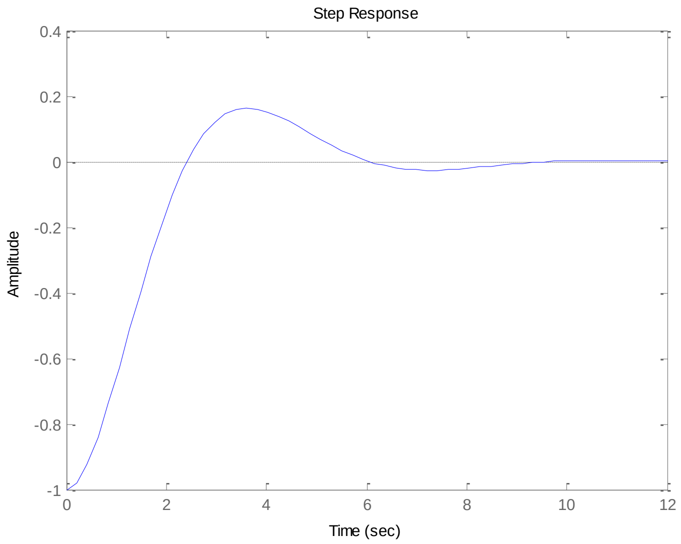
Applicando il teorema della risposta iniziale e finale si ottiene che

- *y(0)=-1*
- $\dot{y}(0) = 0$
- $y(\infty) = 0$

Si tenga infine conto che la trasformata di Laplace di y(t) è

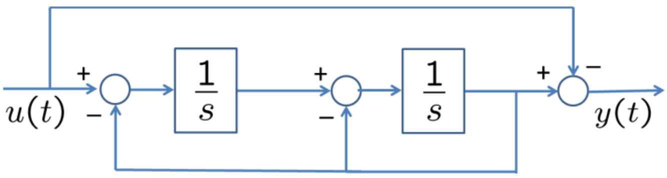
$$Y(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2+s+1} - 1\right) = \frac{1}{s(s^2+s+1)} - \frac{1}{s}$$

e quindi corrisponde alla differenza tra l'antitrasformata di $\frac{1}{s(s^2+s+1)}$ *e sca(t). Per studiare le dinamiche della risposta forzata è quindi sufficiente studiare le dinamiche della risposta allo scalino di* $\frac{1}{s^2+s+1}$*. I poli dominanti (con pulsazione naturale* $\omega_n = 1 rad/s$*) hanno smorzamento pari a 0.5. Questo comporta: sovraelongazione percentuale pari a circa 16%, periodo di oscillazione paria circa 7 unità di tempo e costante di tempo pari a 2 unità di tempo (tempo di assestamento all'1% pari a circa 10 unità di tempo). La risposta è mostrata in figura.*



ESERCIZIO 3

si consideri il seguente schema a blocchi:

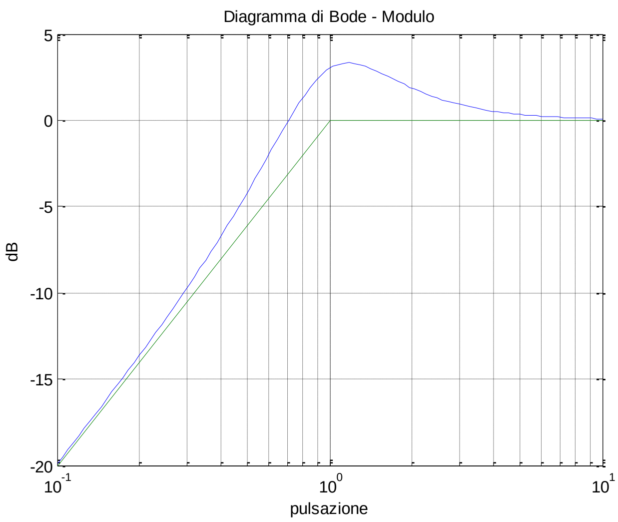


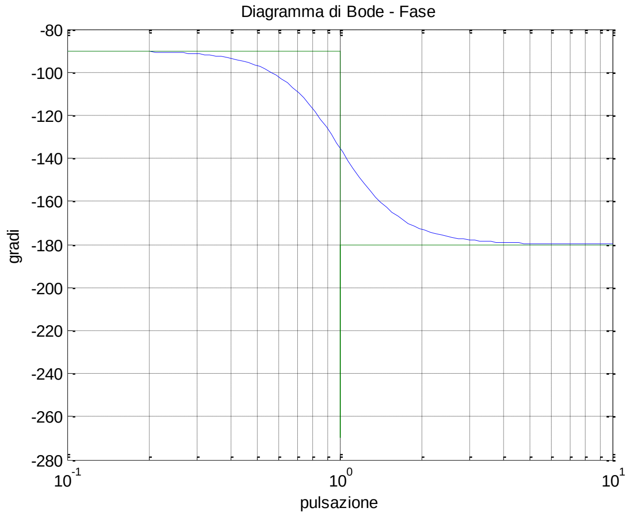
A. Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Si ottiene

$$G(s) = -\frac{s(s+1)}{s^2+s+1}$$

B. Si disegnino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento ottenuta.



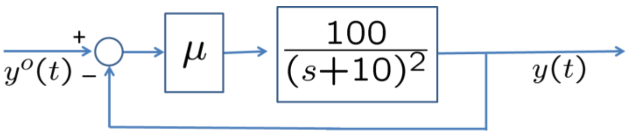


C. Si determini, in modo approssimato, l'ampiezza della sinusoide in uscita in condizioni stazionarie in risposta all'ingresso $u(t) = \sin(0.1\ t)$.

In virtù del teorema della risposta armonica, tale fattore di amplificazione corrisponde a $-20dB = 0.1$.

ESERCIZIO 4

Si consideri lo schema di controllo retroazionato in figura



A. Si enunci con precisione il teorema di Nyquist.

Si veda il libro di testo.

B. Si indichino i valori del parametro μ per i quali il criterio di Nyquist è applicabile, ma non lo è il criterio di Bode.

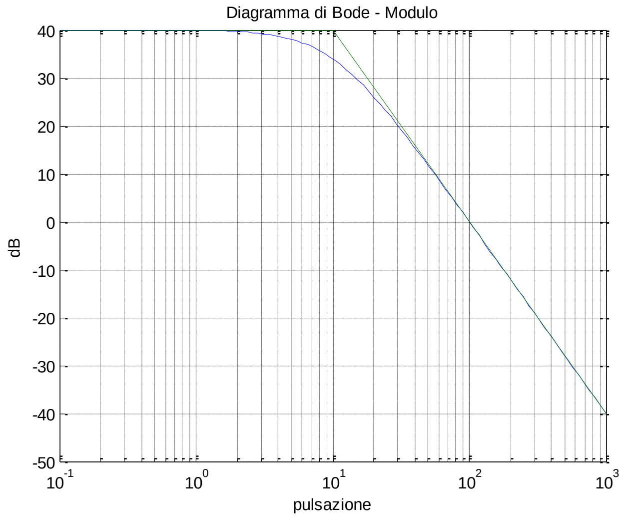
Si ricordi che (oltre a P=0), l'ipotesi da verificare per poter applicare il criterio di Bode è che il diagramma del modulo di L(s)=μ $\frac{100}{(s+10)^2}$ *attraversi l'asse a 0dB (dall'alto in basso). Tale ipotesi non si verifica se* $-1 \leq \mu \leq 1$. *In questo caso il criterio di Nyquist è ovviamente applicabile.*

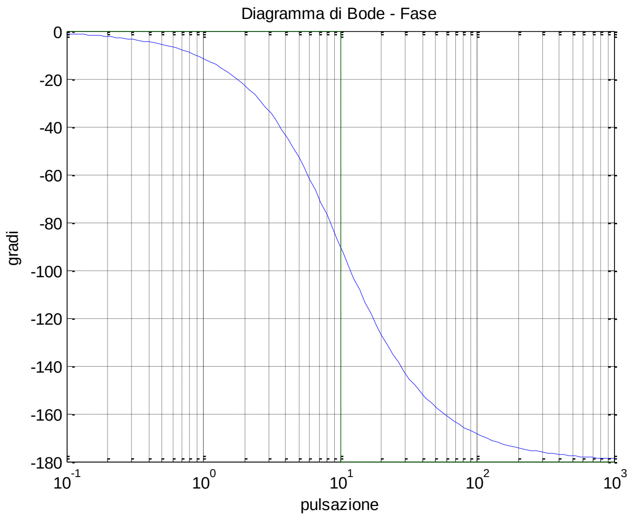
C. Per quali valori del parametro μ, in base all'applicazione del criterio di Bode, è possibile concludere che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile?

In base al criterio di Bode, il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile se $\mu > 1$.

D. Si ponga $\mu = 100$. Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino $y^o(t) = sca(t)$ (tenendo conto delle dinamiche di risposta risultanti, della sovraelongazione massima percentuale - $S\% = 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$ -, del periodo di oscillazione della risposta smorzata - $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ - e del guadagno del sistema retroazionato).

Con $\mu = 100$*, i diagrammi di Bode del modulo e della fase di L(s) sono mostrati in figura.*





La pulsazione di taglio risulta $\omega_c = 100$ *rad/s e il margine di fase risulta circa pari a 10°. Si ottiene che, per quanto riguarda il sistema ad anello chiuso, l'approssimazione a poli dominanti prevede due poli complessi coniugati aventi pulsazione naturale* ω_c *e smorzamento* $\xi \approx \frac{\varphi_m}{100} = 0.1$*. La funzione di sensitività complementare approssimata è*

$$F(s) = \frac{\mu_F}{1 + \frac{0.2s}{100} + \frac{s^2}{(100)^2}}$$

dove $\mu_F = 100/101$*. La risposta allo scalino del sistema ad anello chiuso (ossia di F(s)) ha le seguenti caratteristiche:*

- *guadagno* $\mu_F = 100/101$,
- *sovraelongazione massima percentuale* $S\% = 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \approx 73\%$,
- *periodo di oscillazione* $T_P = \frac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi^2}} \approx 0.0631$ *unità di tempo,*
- *costante di tempo* $\tau = \frac{1}{\xi\omega_c} = 0.1$ *unità di tempo (tempo di assestamento all'1% circa* 5τ*=0.5 unità di tempo).*

Si veda la figura sottostante.