INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME

Prima prova *in itinere* – 07 maggio 2013

Anno Accademico 2012/2013

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &=& -(x_1(t)+x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &=& -4x_2(t)+u(t) \\ y(t) &=& x_1(t)+x_2(t) \end{cases}$$

1.1. Calcolare il movimento libero dell'uscita, ottenuto con la seguente condizione iniziale

$$x(0)=\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di sistema risulta

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono pari a $\lambda_1=-1, \lambda_2=-4$*. L'uscita del sistema risulta essere combinazione lineare dei modi e pertanto* $y(t)=\gamma_1 e^{-t}+\gamma_2 e^{-4t}$*. Si ottiene* $y(0)=\gamma_1+\gamma_2=Cx(0)=1, \dot{y}(0)=-\gamma_1-4\gamma_2=CAx(0)=-1$*. Si ottiene quindi che* $\gamma_1=1, \gamma_2=0$*.*

1.2. Calcolare le condizioni di equilibrio per le variabili di stato e per l'uscita in corrispondenza di un generico ingresso costante $u(t)=\bar{u}$. E' un equilibrio asintoticamente stabile?

Si ottiene che $\bar{x}_2=\bar{u}/4$ *e* $\bar{x}_1=-\bar{u}/4$*. L'equilibrio è asintoticamente stabile poiché gli autovvalori della matrice di sistema A sono entrambi negativi.*

1.3. Si calcoli l'espressione analitica della risposta forzata del sistema al segnale $u(t)=\bar{u}\,\mathrm{sca}(t)$.

Si può svolgere il calcolo attraverso l'applicazione (in cascata) dell'equazione di Lagrange dove si pone $x_1(0)=x_2(0)=0$*. Dalla seconda equazione del sistema:*

$$x_2(t)=\int_0^t e^{-4(t-\tau)}\,\bar{u}d\tau=\frac{\bar{u}}{4}(1-e^{-4t})\mathrm{sca}(t)$$

Considerando $x_2(t)$ *come ingresso alla prima equazione si ottiene*

$$x_1(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}(-x_2(\tau))d\tau=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\left[-\frac{\bar{u}}{4}(1-e^{-4\tau})\right]d\tau=-\frac{\bar{u}}{4}(1-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t})\,\mathrm{sca}(t)$$

Si ottiene infine:

$$y(t)=\frac{\bar{u}}{3}(e^{-t}-e^{-4t})\,\mathrm{sca}(t)$$

ESERCIZIO 2

Dato il sistema considerato nell'ESERCIZIO 1

2.1. Si scriva la funzione di trasferimento del sistema.

Si ottiene

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\frac{s}{(s+1)(s+4)}$$

2.2. Per la funzione di trasferimento ricavata al punto 2.1., si determinino

a) guadagno: *il guadagno (generalizzato) della funzione di trasferimento è* $\mu = 1/4$.
b) tipo: *data la presenza di uno zero nell'origine g=-1.*
c) poli: *s=-1. s=-4.*
d) zeri: *l'unico zero è s*=0.

2.3. Si consideri un ingresso $u(t) = e^{-at}\text{sca}(t)$. Si determini l'espressione della risposta forzata dell'uscita nei casi:

a) $a = 0$
b) $a = 1$
c) $a = 2$

La trasformata di Laplace di u(t) è U(s)=1/(s+a). Da qui si ottiene che:

a) Y(s)=$\frac{1}{(s+1)(s+4)} = \frac{1/3}{(s+1)} - \frac{1/3}{(s+4)}$*. Si ottiene quindi il risultato del punto 1.3.*

b) Y(s)=$\frac{s}{(s+1)^2(s+4)} = \frac{4/9}{(s+1)} + \frac{-1/3}{(s+1)^2} + \frac{-4/9}{(s+4)}$*. Si ottiene quindi*

$$y(t) = (\frac{4}{9}e^{-t} - \frac{1}{3}te^{-t} - \frac{4}{9}e^{-4t})\text{sca}(t)$$

c) Y(s)=$\frac{s}{(s+1)(s+4)(s+2)} = \frac{-1/3}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)} + \frac{-2/3}{(s+4)}$*. Si ottiene quindi*

$$y(t) = (-\frac{1}{3}e^{-t} + e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-4t})\text{sca}(t)$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= & -10x_1(t) - 11x_2(t) + 10u(t) \\ y(t) &= & 0.1x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

3.1. Si scriva la funzione di trasferimento del sistema.

Si ottiene

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{10(s + 0.1)}{(s + 1)(s + 10)}$$

3.2. Si determinino le proprietà di stabilità del sistema.

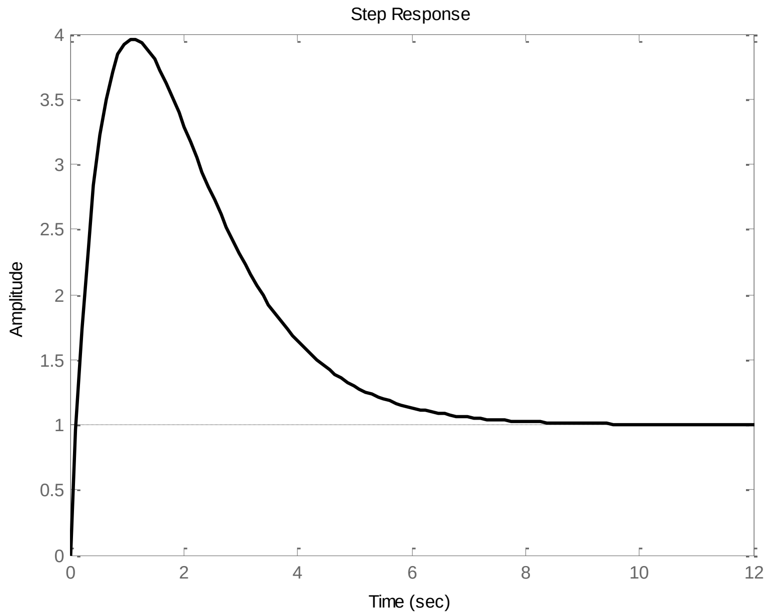
Gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -10$. *Pertanto il sistema risulta essere asintoticamente stabile.*

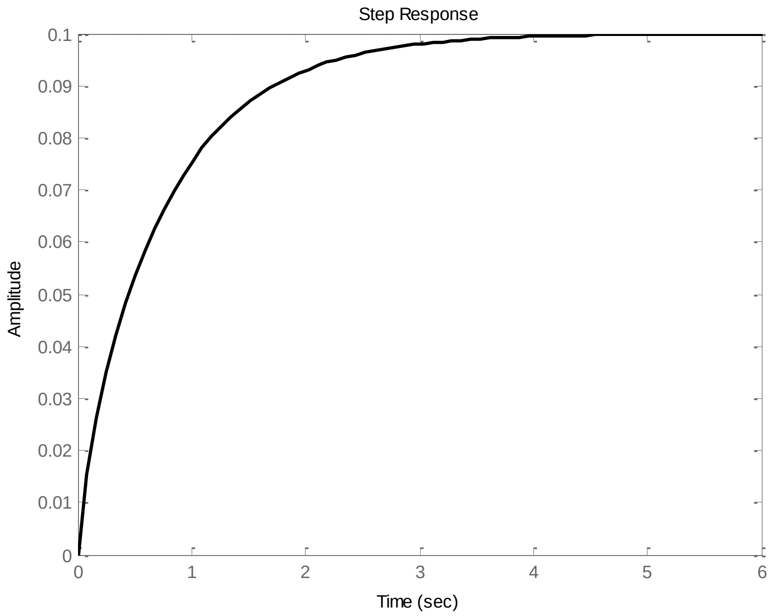
3.3. Si calcolino, per la funzione di trasferimento ricavata al punto 3.1.

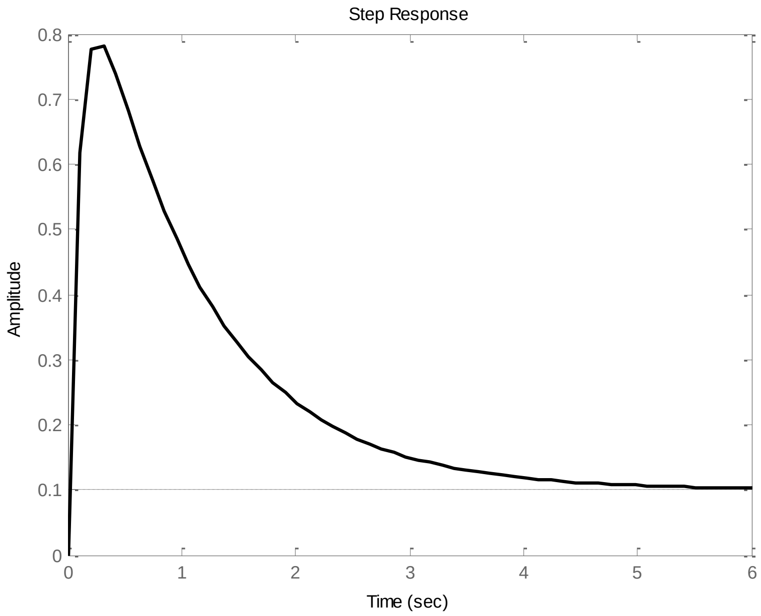
d) guadagno: $\mu = 0.1$.
e) tipo: g=0.
f) poli: *s=-1, s=-10*.
g) zeri: *s=-0.1*.
h) costante di tempo relativa al polo dominante: *dato che il polo dominante è s=-1, la costante di tempo associata a questo polo è* $\tau = 1$.

3.4. Si indichi quale dei seguenti grafici mostra la risposta del sistema ad uno scalino di ampiezza unitaria. Si motivi la risposta in modo conciso.

Il grafico relativo alla risposta allo scalino unitario del sistema è il terzo. Infatti, il guadagno è 0.1, e si riscontra la presenza di uno zero compreso tra l'asse immaginario e il polo dominante, che determina la sovraelongazione nella risposta.


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
0
2
4
6
8
10
12


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1
0
1
2
3
4
5
6


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0
1
2
3
4
5
6

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema S descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \quad e^{-3x(t)} - x(t) - u(t) \\ y(t) &= \quad x(t) \end{aligned}$$

4.1. Si indichi, giustificando brevemente le risposte, se il sistema

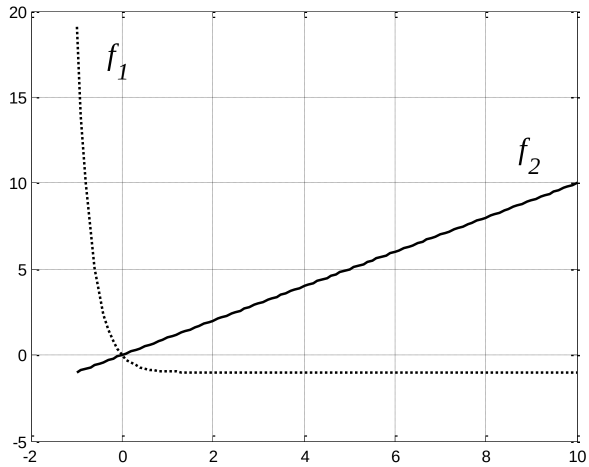
a) è dinamico: *sì.*
b) è lineare: *no.*
c) è strettamente proprio: *sì.*
d) è tempo-variante: *no*
e) ha ordine 2: *no, n=1.*
f) è SISO: *sì.*

4.2. Determinare le condizioni di equilibrio (per le variabili di stato e di uscita) associate all'ingresso costante $u(t)=1\ \forall t$.

Le condizioni di equilibrio cercate soddisfano l'equazione

$$e^{-3\bar{x}} - 1 = \bar{x}$$

E' evidente che l'unico punto di intersezione tra la funzione $f_1(\bar{x}) = e^{-3\bar{x}} - 1$ *e la funzione* $f_2(\bar{x}) = \bar{x}$ *è* $\bar{x} = 0$ *(si veda la figura sottostante).*



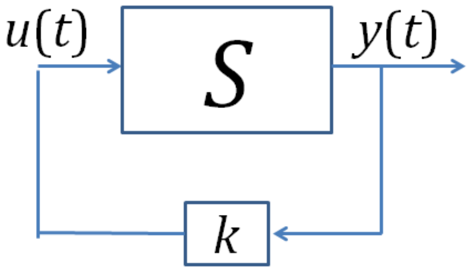
4.3. Valutare le proprietà di stabilità dell'equilibrio/degli equilibri trovati al punto precedente utilizzando un metodo a scelta (metodo grafico o linearizzazione) .

Si osservi che $f(x,\bar{u}) = f_1(x) - f_2(x)$ *e, osservando la figura sovrastante:*

- *Se x<0* $f_1(x) > f_2(x)$*, e quindi* $f(x,\bar{u}) > 0$*.*
- *Se x>0* $f_1(x) < f_2(x)$*, e quindi* $f(x,\bar{u}) < 0$*.*

Da quanto visto si deduce che l'equilibrio x=0 è asintoticamente stabile.

4.4. Si consideri lo schema in figura

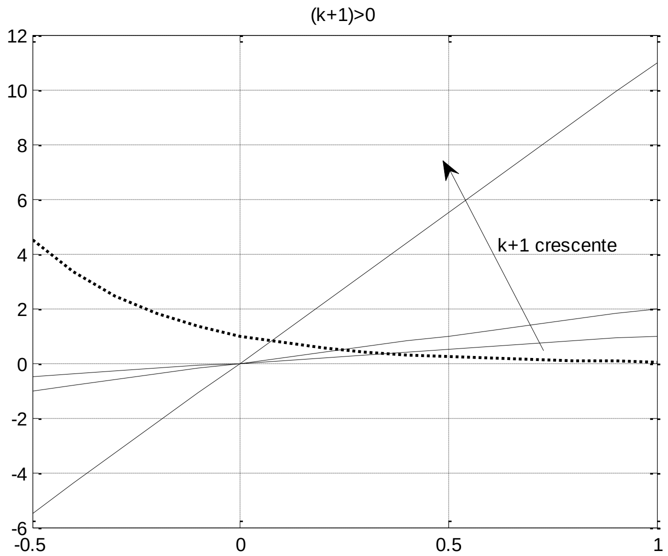


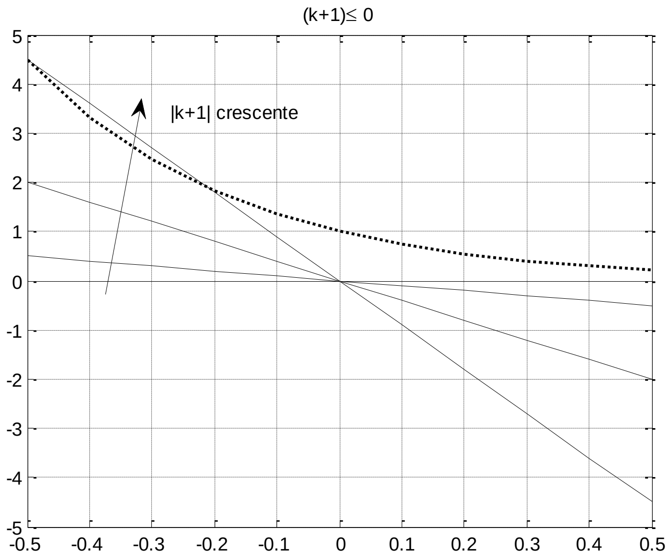
dove k è un parametro reale. Si scriva l'equazione dinamica del sistema così ottenuto e si determinino i valori del parametro k affinchè il sistema presenti un unico equilibrio, ed esso sia asintoticamente stabile (Si suggerisce di utilizzare il metodo grafico. Si noti che non è necessario trovare il valore numerico delle condizioni di equilibrio trovate).

In base allo schema in figura si ottiene che u(t)=ky(t)=kx(t). In generale il sistema si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = &\quad e^{-3x(t)} - (k+1)x(t) \\ y(t) = &\quad x(t) \end{aligned}$$

Si definiscano le funzioni $f_3(x) = e^{-3x}$ *e* $f_4(\bar{x}) = (k+1)x$. *In questo caso* $f(x, kx) = f_3(x) - f_4(x)$, *dove le funzioni viste sono illustrate nelle figure sottostanti.*





Si può concludere che

- *se k+1>0 le due funzioni si intersecano una sola volta (nel punto di equilibrio generico $\bar{x}$), e vale $f(x,kx) = f_3(x) - f_4(x) > 0$ se $x < \bar{x}$ mentre $f(x,kx) = f_3(x) - f_4(x) < 0$ $x > \bar{x}$. In questo caso $\bar{x}$ è unico e asintoticamente stabile.*
- *se k+1≤0 si possono avere diversi casi:*
  - *le due funzioni non si intersecano: in questo caso non esiste nessuna condizione di equilibrio.*
  - *le due funzioni si intersecano una sola volta, cioè $f_4(x)$ è tangente rispetto a $f_3(x)$. In questo caso $f_3(x) - f_4(x) > 0$ per qualsiasi valore di $x \neq \bar{x}$, che significa che l'equilibrio trovato è instabile.*
  - *le due funzioni si intersecano due volte (esistono due equilibri).*

La condizione su k cercata è che k>-1.