

INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME E SOLUZIONI

Appello- 24 giugno 2013

Anno Accademico 2012/2013

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + x_2^2(t) - u^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_2^2(t) + x_1(t) + u^2(t) \\ y(t) = x_1^2(t) + u(t) \end{cases}$$

A. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema, motivando brevemente le risposte:

- è lineare o non lineare? *Il sistema è non lineare: $f(x,u)$ è non lineare.*
- è statico o dinamico? *Il sistema è dinamico.*
- è strettamente proprio? *No, il sistema è proprio non strettamente.*
- è MIMO? *No. Il sistema è SISO.*
- qual è l'ordine del sistema? *L'ordine è $n=2$.*

B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.

Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$. Il sistema linearizzato è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \delta u$$

$$\delta y = C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \delta u$$

dove

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -3 & 2\bar{x}_2 \\ 1 & -6\bar{x}_2 \end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -2\bar{u} \\ 2\bar{u} \end{bmatrix}$$

$$C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = [2\bar{x}_1 \quad 0], \quad D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = 1$$

C. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = -1$.

Le equazioni del sistema all'equilibrio si ottengono ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ e $u(t) = -1$:

$$\begin{aligned} -3\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 - 1 &= 0 \\ -3\bar{x}_2^2 + \bar{x}_1 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

la loro soluzione corrisponde a $\bar{x}_1 = \bar{x}_2^2 = \frac{1}{4}$. Esistono quindi due movimenti di equilibrio possibili:

I. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1\right)$

II. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right)$

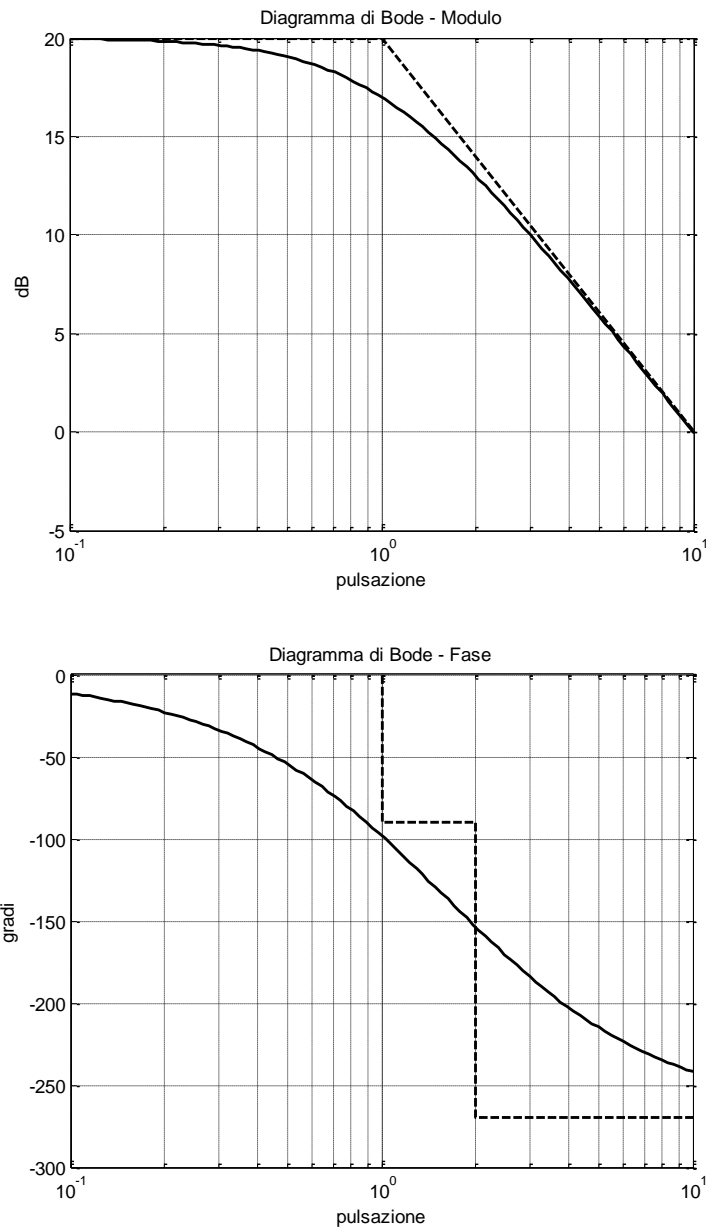
D. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati al punto precedente.

Il polinomio caratteristico della matrice di sistema è $p_A(\lambda) = \lambda^2 + (3 + 6\bar{x}_2)\lambda + 16\bar{x}_2$. Si considerino i due possibili equilibri trovati precedentemente:

- I. $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 8$: l'equilibrio corrispondente è instabile.
- II. $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$: l'equilibrio corrispondente è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema lineare di ordine 2 rappresentato dai seguenti diagrammi di Bode



A. Si determini analiticamente la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.

Si osservi che:

- Dato che $|G(j\omega)| = 20 \text{ dB}$ per $\omega \rightarrow 0$, $|\mu| = 10$ in scala lineare.
- Dato che $\angle G(j\omega) = 0$ per $\omega \rightarrow 0$, il segno del guadagno μ è positivo.
- La funzione di trasferimento $G(s)$ presenta un polo, con parte reale negativa, in corrispondenza di $\omega = 1 \text{ rad/s}$ (cambio di pendenza di -20 dB/dec nel diagramma del modulo, corrispondente a uno sfasamento negativo di 90 gradi nel diagramma della fase).
- Dato che, in corrispondenza di $\omega = 2 \text{ rad/s}$, il diagramma della fase presenta uno sfasamento negativo di 180 gradi, esistono delle singolarità in questo punto. In particolare, dato che non si testimonia nessun cambio di pendenza sul diagramma del modulo, esisterà un numero di poli pari al numero di zeri in corrispondenza di $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Dato che il sistema è di ordine 2 (due poli in tutto) in corrispondenza di $\omega = 2 \text{ rad/s}$ si evince la presenza di un polo (con parte reale negativa) e uno zero (con parte reale positiva), entrambi caratterizzati da un contributo negativo sul diagramma della fase.

In base a queste considerazioni la funzione di trasferimento del sistema risulta:

$$G(s) = 10 \frac{1 - \frac{s}{2}}{(1+s)(1 + \frac{s}{2})}$$

B. Si calcoli la risposta forzata del sistema ad un ingresso $u(t) = e^{-3t}$.

Si calcola che

$$Y(s) = G(s)U(s) = -10 \frac{s-2}{(1+s)(s+2)(s+3)} = \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\beta}{s+2} + \frac{\gamma}{s+3}$$

dove $U(s)$ e $Y(s)$ rappresentano, rispettivamente, la trasformata di Laplace di $u(t)$ e di $y(t)$. Utilizzando il metodo dei residui, si calcola che $\alpha = 15$, $\beta = -40$, $\gamma = 25$.

Antitrasformando la funzione $Y(s)$, si ottiene che

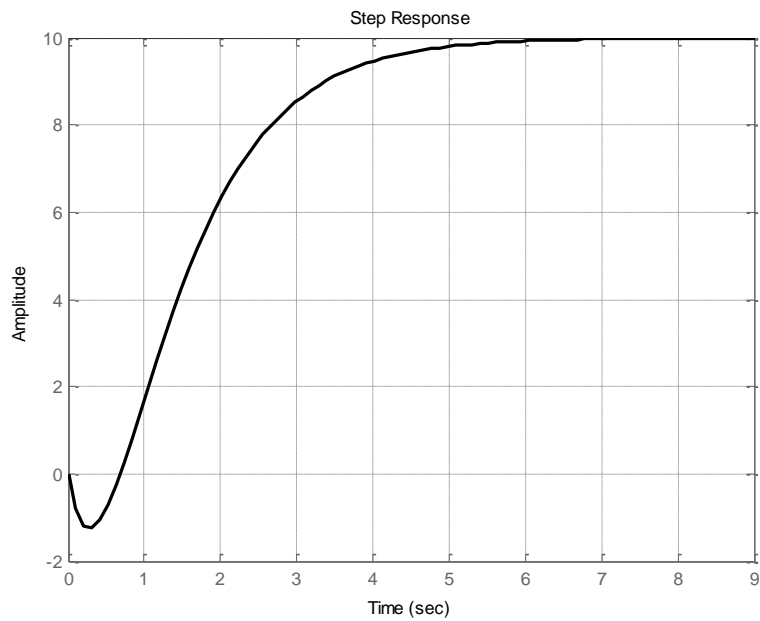
$$y(t) = (15e^{-t} - 40e^{-2t} + 25e^{-3t})\text{sca}(t)$$

C. Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema rappresentato da $G(s)$, tenendo conto del guadagno del sistema, del tempo di assestamento e della eventuale presenza di fenomeni di sovralongazione o "risposta inversa".

Osservando la funzione di trasferimento $G(s)$, si nota che

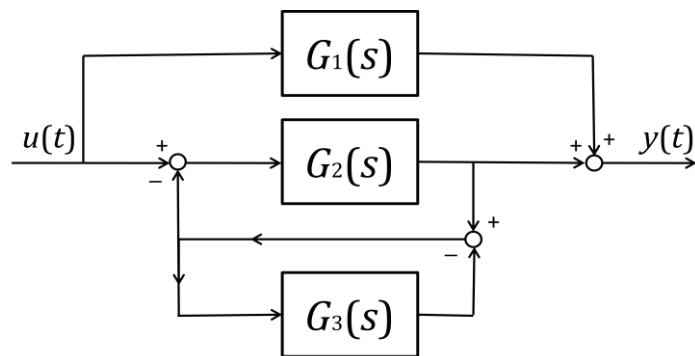
- Il polo dominante è $s = -1$ con costante di tempo $\tau = 1$ unità di tempo.
- Sebbene il secondo polo assuma un valore prossimo a quello del polo dominante, in prima approssimazione è possibile calcolare il tempo di assestamento (all'1%) come $T_{a1} \cong 5\tau = 5$ unità di tempo.
- La presenza di uno zero significativo avente parte reale positiva caratterizza il fenomeno della risposta inversa.
- Il guadagno del sistema è $\mu = 10$.
- Dato che i poli sono reali non si verificano oscillazioni nella risposta.

Pertanto, si ottiene una risposta allo scalino avente l'andamento in figura.



ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente schema a blocchi:



A. Trovare la funzione di trasferimento equivalente tra l'ingresso u e l'uscita y .

La funzione di trasferimento corrispondente è:

$$G_{TOT}(s) = G_1(s) + \frac{G_2(s)}{1 + \frac{G_2(s)}{1 + G_3(s)}} = G_1(s) + \frac{G_2(s)(1 + G_3(s))}{1 + G_2(s) + G_3(s)}$$

B. Esiste nello schema a blocchi in figura una (o più) funzione di trasferimento la cui asintotica stabilità è necessaria per garantire la asintotica stabilità dell'intero sistema?

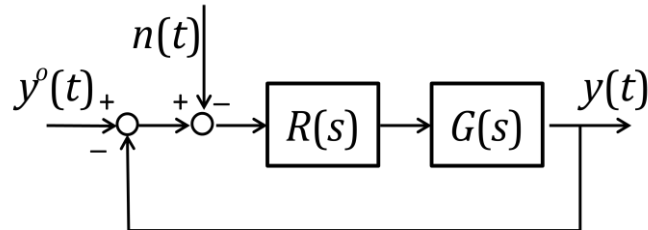
Per garantire che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile è necessario che la funzione di trasferimento $G_1(s)$ sia relativa a un sistema asintoticamente stabile. Infatti, non essendo tale sistema inserito in anelli di retroazione, i suoi autovalori risultano essere parte degli autovalori del sistema complessivo.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di ordine 2 avente la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{1 + s + s^2}$$

A. Si analizzino le proprietà di stabilità del sistema **ad anello chiuso** in figura:

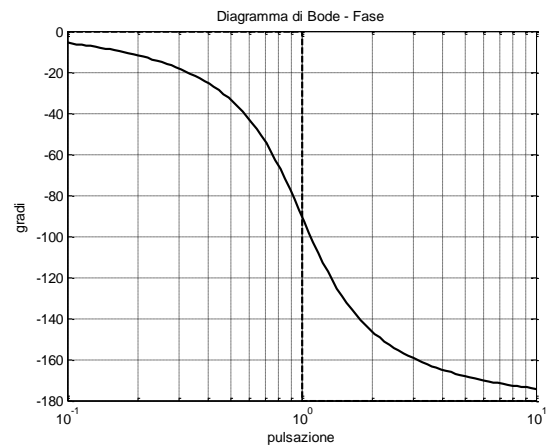
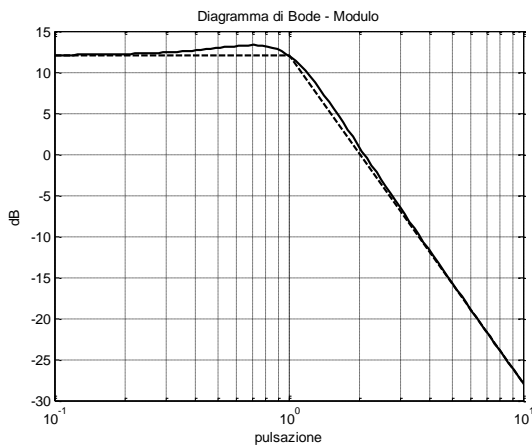


nei seguenti casi:

- $R(s) = 4$
- $R(s) = \frac{4}{s}$
- $R(s) = \frac{4}{s}(1 + s)$

Caso a:

I diagrammi di Bode del modulo e della fase di $L(s)=R(s)G(s)$ sono



Le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono verificate. Infatti

- $L(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.
- Il diagramma del modulo di $L(s)$ attraversa una sola volta, dall'alto in basso, l'asse a 0 dB.
- $L(s)$ è strettamente propria.

Si calcola che:

- Il margine di fase di $L(s)$ è $\varphi_m > 0$ in quanto la fase critica $0 > \varphi_c > -180$.
- Il guadagno di $L(s)$ è $\mu = 4 > 0$

In base al criterio di Bode, il sistema ad anello chiuso corrispondente è asintoticamente stabile.

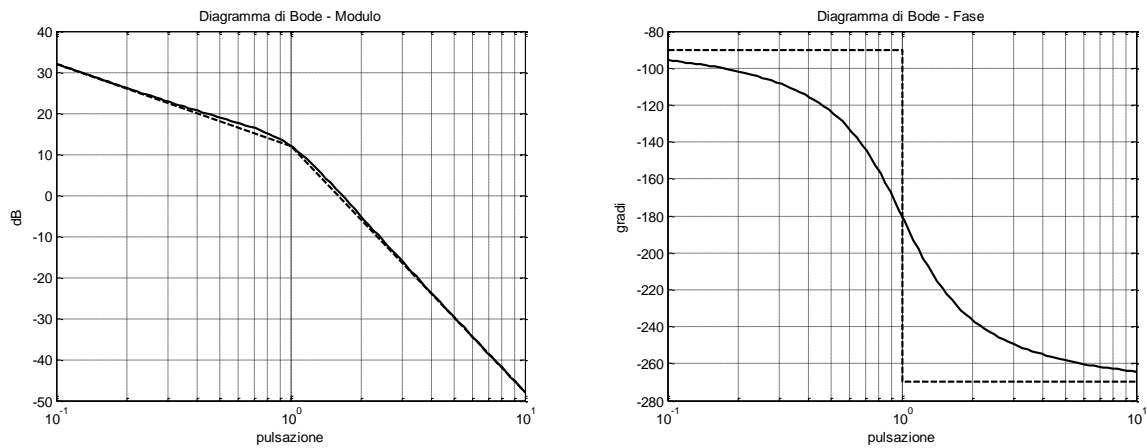
Inoltre:

- Il diagramma asintotico, per $\omega > 1$, ha l'andamento di $L(s) = \frac{4}{s^2}$. Il valore di ω_c , cioè la pulsazione in corrispondenza della quale avviene l'attraversamento dell'asse a 0 dB, viene calcolata quindi ponendo $\frac{4}{\omega^2} = 1$, cioè $\omega_c = 2$ rad/s. Questa conclusione poteva essere ottenuta osservando i diagrammi asintotici tracciati.
- Il valore della pulsazione critica si può calcolare con l'ausilio del regolo delle fasi, oppure attraverso il seguente calcolo:

$$\varphi_c = \angle L(j\omega_c) = -\angle(1 - \omega_c^2 + j\omega_c) = -\angle(-4 + 1 + 2j) = -146.3^\circ$$
 Si calcola quindi che $\varphi_m = 180 - |\varphi_c| = 33.7^\circ$.
- Lo sfasamento di $L(s)$ è sempre $\angle L(s) > -180^\circ$. Perciò il margine di fase k_m è infinito.

Caso b:

I diagrammi di Bode del modulo e della fase di $L(s)=R(s)G(s)$ sono



Le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono verificate. Infatti

- $L(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.
- Il diagramma del modulo di $L(s)$ attraversa una sola volta, dall'alto in basso, l'asse a 0 dB.
- $L(s)$ è strettamente propria.

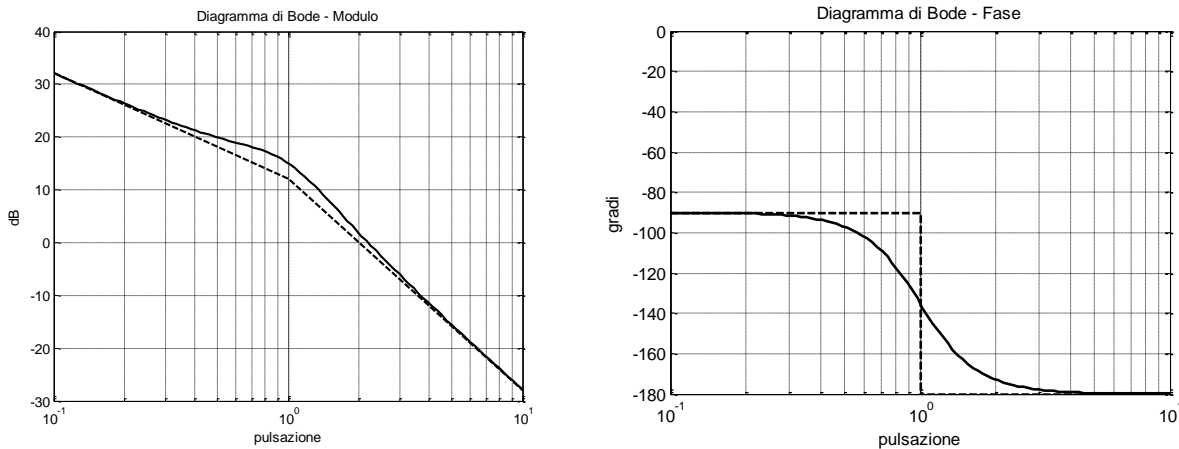
Si consideri che:

- Dato che sono presenti due poli complessi coniugati aventi pulsazione critica $\omega_n = 1$ rad/s, in corrispondenza di tale punto lo sfasamento dovuto ai poli complessi coniugati è esattamente pari a -90 gradi.
- Il diagramma della fase di $L(s)$ presenta sfasamento costante di -90 gradi dovuto al polo nell'origine.
- Lo sfasamento totale di $L(s)$ in corrispondenza di $\omega_n = 1$ rad/s è pertanto -180 gradi.
- Il guadagno di $L(s)$ è $\mu = 4 > 0$, e la pulsazione critica $\omega_n > 1$ rad/s.

Da queste osservazioni si conclude che lo sfasamento critico è $\varphi_c = \angle L(j\omega_c) < -180$, e quindi il margine di fase di $L(s)$ è $\varphi_m = 180 - |\varphi_c| < 0$. In base al criterio di Bode, il sistema ad anello chiuso corrispondente è instabile.

Caso c:

I diagrammi di Bode del modulo e della fase di $L(s)=R(s)G(s)$ sono



Le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono verificate. Infatti

- $L(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.
- Il diagramma del modulo di $L(s)$ attraversa una sola volta, dall'alto in basso, l'asse a 0 dB.
- $L(s)$ è strettamente propria.

Si calcola che:

- Il margine di fase di $L(s)$ è $\varphi_m > 0$ in quanto la fase critica $0 > \varphi_c > -180$.
- Il guadagno di $L(s)$ è $\mu = 4 > 0$

In base al criterio di Bode, il sistema ad anello chiuso corrispondente è asintoticamente stabile.

Inoltre:

- Come nel **caso a**, il diagramma asintotico, per $\omega > 1$, ha l'andamento di $L(s) = \frac{4}{s^2}$. Il valore di ω_c , cioè la pulsazione in corrispondenza della quale avviene l'attraversamento dell'asse a 0 dB, viene calcolata quindi ponendo $\frac{4}{\omega^2} = 1$, cioè $\omega_c = 2$ rad/s. Questa conclusione poteva essere ottenuta osservando i diagrammi asintotici tracciati.
- Il valore della pulsazione critica si può calcolare con l'ausilio del regolo delle fasi, oppure attraverso il seguente calcolo:
$$\varphi_c = \angle L(j\omega_c) = -90 + \angle(1 + 2j) - \angle(1 - \omega_c^2 + j\omega_c) = -27^\circ - 146.3^\circ = -173.3^\circ$$

Si calcola quindi che $\varphi_m = 180 - |\varphi_c| = 6.7^\circ$.
- Lo sfasamento di $L(s)$ è sempre $\angle L(s) > -180^\circ$. Perciò il margine di fase k_m è infinito.

B. Si confrontino le prestazioni ottenibili con i regolatori, visti al punto A, che garantiscono asintotica stabilità al sistema ad anello chiuso, in termini di:

- a. "Robustezza" della proprietà di stabilità.
- b. Risposta statica (a transitorio esaurito) del sistema ad anello chiuso ad un segnale di riferimento a scalino $y^o(t) = sca(t)$.

- c. Risposta dinamica del sistema ad anello chiuso ad un segnale di riferimento a scalino $y^o(t) = sca(t)$. Si confrontino le costanti di tempo e le sovraelongazioni percentuali ($S\% = 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$).

Si considerano ora solo i due casi in cui il sistema di controllo risulta asintoticamente stabile, (**Caso a** e **Caso c**).

- a. I parametri di robustezza sono margine di guadagno (k_m è infinito in entrambi i casi in esame) e il margine di fase ($\varphi_m = 33.7^\circ$ nel **Caso a**, mentre $\varphi_m = 6.7^\circ$ nel **Caso c**). Il sistema di controllo del **Caso a** risulta essere più robusto rispetto a possibili sfasamenti (dovuti, ad esempio, a ritardi).
- b. Nel **Caso a** il tipo di $L(s)$ è $g=0$ e il guadagno della funzione di sensitività complementare risulta

$$\mu_{Fa} = \frac{\mu}{1 + \mu} = \frac{4}{5}$$

Nel **Caso c** il tipo di $L(s)$ è $g=1$ e il guadagno della funzione di sensitività complementare risulta essere pari a $\mu_{Fc} = 1$. Si conclude quindi che il sistema di controllo del **Caso c** ha una precisione statica migliore del sistema di controllo del **Caso a**.

- c. In entrambi i casi in esame si ha che $\varphi_m < 75^\circ$, da cui segue che la funzione di trasferimento approssimante della funzione di sensitività complementare è la seguente:

$$F_{appr}(s) = \frac{\mu_F}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Dove:

○ **Caso a:**

- $\mu_F = \frac{4}{5}$
- $\xi \cong \frac{\varphi_m}{100} = 0.34$
- $\omega_n = \omega_c = 2 \text{ rad/s}$
- $\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = 1.47 \text{ unità di tempo}$
- $S\% = 32\%$

○ **Caso c:**

- $\mu_F = 1$
- $\xi \cong \frac{\varphi_m}{100} = 0.07$
- $\omega_n = \omega_c = 2 \text{ rad/s}$
- $\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = 7 \text{ unità di tempo}$
- $S\% = 80\%$

Si può concludere che, nel **Caso c**, la precisione dinamica è peggiore (maggiore sovra elongazione percentuale) e il tempo di assestamento è maggiore che nel **Caso a**.