INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME E SOLUZIONI

26 luglio 2013

Anno Accademico 2012/2013

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalla equazione scalare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

dove

$$f(x, u) = x sin(x) - xu$$

A. Sia l'ingresso costante, cioè $u(t) = \bar{u}$. Si determini il numero di condizioni di equilibrio possibili al variare del valore di $\bar{u}$, per valori di x appartenenti all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Si noti che non è richiesto il calcolo esplicito dei valori corrispondenti agli equilibri suddetti.

L'equazione del sistema all'equilibrio si ottiene ponendo $\dot{x} = 0$ *e* $u(t)=\bar{u}$:

$$\bar{x}(sin(\bar{x}) - \bar{u}) = 0$$

Risulta che, se $|\bar{u}| \leq 1$*, i possibili movimenti di equilibrio del sistema risultano essere due, cioè* $\bar{x} = 0$ *e la soluzione di* $sin(\bar{x}) = \bar{u}$

Se $|\bar{u}| > 1$*, l'unica soluzione ammissibile è* $\bar{x} = 0$.

B. Si valutino le proprietà di stabilità degli equilibri trovati per i seguenti valori dell'ingresso $\bar{u}$:

a. $\bar{u} = 2$
b. $\bar{u} = 0$
c. $\bar{u} = -1/2$
d. $\bar{u} = -2$

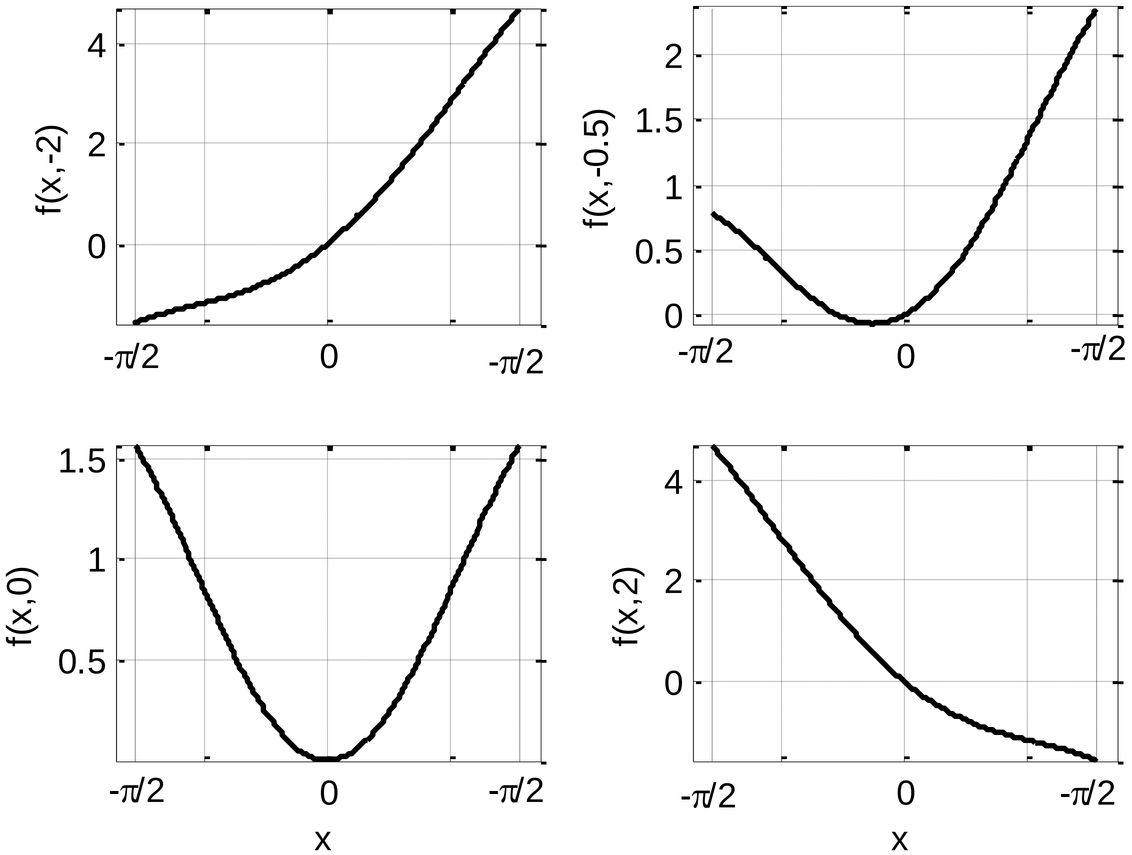
Per rispondere a questa domanda si può procedere per via analitica oppure ci si può avvalere dei grafici della funzione $f(x, \bar{u})$ (ottenuta in corrispondenza dei suddetti valori di $\bar{u}$) mostrati in seguito.

Osservando i grafici nella figura sottostante è possibile rispondere alla domanda.

a. *Se* $\bar{u} = 2$ *(si veda il grafico in basso a destra) l'unico equilibrio ammissibile è* $\bar{x} = 0$*. Esso risulta essere asintoticamente stabile. Infatti,*
   - *per valori di x<0, si osserva che f(x,2)>0 (il valore di x tende ad aumentare nel tempo)*
   - *per valori di x>0 si osserva che f(x,2)<0 (il valore di x tende a diminuire nel tempo)*
b. *Se* $\bar{u} = 0$ *(si veda il grafico in basso a sinistra) l'unico equilibrio ammissibile è* $\bar{x} = 0$*. Esso risulta essere instabile. Infatti, per valori di x>0 si osserva che f(x,2)>0 (il valore di x tende ad aumentare nel tempo). Perciò, per condizioni iniziali diverse (e in particolare maggiori) della condizione di equilibrio, il valore di x tende a divergere.*
c. *Se* $\bar{u} = -\frac{1}{2}$ *(si veda il grafico in alto a destra) le condizioni di equilibrio ammissibili sono* $\bar{x} = 0$ *e* $\bar{x} = \frac{\pi}{3}$*. Si osserva che*
   - *per x<0, f(x,2)>0 (il valore di x tende ad aumentare nel tempo)*
   - *per 0<x<*$\frac{\pi}{3}$*, f(x,2)<0 (il valore di x tende a diminuire nel tempo)*
   - *per x>*$\frac{\pi}{3}$*, f(x,2)>0 (il valore di x tende ad aumentare nel tempo)*

Si conclude che $\bar{x} = 0$ è un equilibrio (localmente) asintoticamente stabile, mentre $\bar{x} = \frac{\pi}{3}$ è instabile.

d. *Se* $\bar{u} = -2$ *(si veda il grafico in alto a sinistra) l'unico equilibrio ammissibile è* $\bar{x} = 0$*. Esso risulta essere instabile. Infatti,*
   - *per valori di x<0, si osserva che f(x,2)<0 (il valore di x tende a diminuire nel tempo)*
   - *per valori di x>0 si osserva che f(x,2)>0 (il valore di x tende ad aumentare nel tempo)*



ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema lineare di ordine 3 avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s-1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

A. Si verifichino le proprietà di stabilità del sistema (si può, a questo scopo, utilizzare il criterio di Routh-Hurwitz).

Si nota inizialmente che, se il sistema è di ordine 3 (presenta 3 autovalori) e la funzione di trasferimento G(s) presenta 3 poli (il denominatore è un polinomio di grado 3), questi ultimi coincidono con gli autovalori del sistema.

La tabella di Routh-Hurwitz risulta essere la seguente:

1	*11*
6	*6*
10	*0*
6	

La tabella di Routh è definita e i segni dei coefficienti della prima colonna risultano concordi, da cui si conclude che i poli del sistema hanno tutti parte reale (strettamente) negativa. Pertanto il sistema risulta asintoticamente stabile.

B. Si consideri ora un ingresso a scalino per il sistema dato, $u(t) = sca(t)$. Si applichi il Teorema del Valore Finale per calcolare il valore assunto dalla variabile di uscita $y(t)$ per $t \to +\infty$, <u>verificando preventivamente le ipotesi di applicabilità</u> di tale teorema.

La trasformata di Laplace di y(t) si calcola come Y(s)=G(s)U(s), dove U(s)=1/s.

Dopo aver verificato le ipotesi di applicabilità del Teorema del Valore Finale (poli di Y(s) aventi parte reale minore o uguale a zero e grado relativo maggiore di zero) si calcola che:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = -\frac{1}{6}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & ax_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = & -x_1(t) + ax_2(t) + u(t) \\ y(t) = & x_1(t) \end{cases}$$

A. Determinare le proprietà di stabilità del sistema al variare del parametro reale a.

Le matrici A, B, C, D del sistema lineare risultano:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1\ 0], D = 0$$

Gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = a + j$ e $\lambda_2 = a - j$. Si conclude che:

- *Se* $a > 0$ *il sistema è instabile.*
- *Se* $a = 0$ *il sistema è semplicemente stabile (presenta due autovalori distinti – ognuno con molteplicità algebrica e geometrica pari a 1 - con parte reale nulla).*
- *Se* $a < 0$ *il sistema è asintoticamente stabile.*

B. Si determini la funzione di trasferimento del sistema, tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$. In particolare, si evidenzino le relazioni tra il parametro a e le caratteristiche della funzione di trasferimento (smorzamento ξ e pulsazione naturale ω_n di eventuali poli complessi coniugati, guadagno, etc.).

La funzione di trasferimento del sistema risulta

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{s^2 - 2as + a^2 + 1} = \frac{1/(a^2 + 1)}{1 + 2\frac{-a}{a^2 + 1}s + \frac{1}{a^2 + 1}s^2}$$

Si ottiene che:

- *Il guadagno della funzione di trasferimento è* $\mu = 1/(a^2 + 1)$*.*
- *Il valore della pulsazione naturale dei poli complessi coniugati ottenuti è pari a* $\omega_n = \sqrt{a^2 + 1}$*.*
- *Il valore dello smorzamento dei poli complessi coniugati è* $\xi = -a/\sqrt{a^2 + 1}$*.*

C. Sulla base dei risultati del punto B. discutere qualitativamente le proprietà della risposta forzata del sistema a un ingresso a scalino $u(t) = sca(t)$ al variare del parametro a. In particolare, si faccia riferimento a tempo di assestamento, valore di regime, sovraelongazione percentuale $S\% = 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$ e periodo di oscillazione $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$.

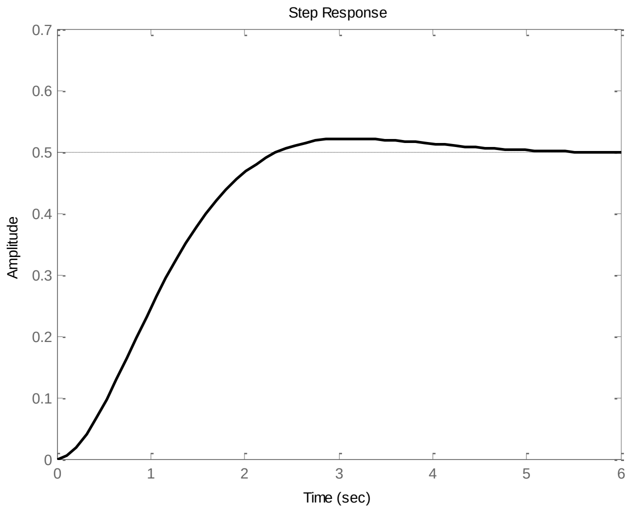
Nel caso il sistema risulti asintoticamente stabile ($a < 0$*)*

- *Il tempo di assestamento è pari a* $T_{a1} \cong 4.6\tau$*, dove* $\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = \frac{1}{|a|}$*. Esso diminuisce all'aumentare del valore di* $|a|$*.*
- *La sovraelongazione percentuale è pari a* $100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 100e^{a\pi}$*. Dunque, al diminuire del valore del parametro* a *(cioè se* $a \to -\infty$*), si ottiene che* $\xi \to 1$ *e che* $S\% \to 0$*.*
- *Il periodo di oscillazione è pari a* $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi$*, invariante al variare di* a*.*

D. Si ponga ora $a = -1$. Sulla base delle analisi svolte al punto C, si disegni qualitativamente la risposta forzata della variabile di uscita del sistema ad un ingresso a scalino.

Per $a = -1$*, si ottiene che:*

- *Il tempo di assestamento è pari a* $T_{a1} \cong 4.6$ *unità di tempo.*
- *La sovraelongazione percentuale è pari a* $S\% = 100e^{-\pi} = 4.3\%$*.*
- *Il periodo di oscillazione è pari a* $T_P = 2\pi \cong 6.26$ *unità di tempo.*
- *Il guadagno è* $\mu = 1/2$*.*



E. Sempre nel caso in cui $a = -1$, si calcoli l'espressione analitica della risposta libera dell'uscita del sistema, con condizioni iniziali $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$.

1) Per il calcolo della risposta libera si può usare la formulazione del sistema in spazio di stato. Si calcola che gli autovalori sono $\lambda_1 = -1 + j$ e $\lambda_2 = -1 - j$. Il movimento libero dell'uscita del sistema si calcola come combinazione lineare dei modi del sistema, cioè:

$$y(t) = \gamma_1 e^{(-1+j)t} + \gamma_2 e^{(-1-j)t}$$

da cui si ottiene che $y(0) = \gamma_1 + \gamma_2 = Cx(0) = 0$.

Inoltre si calcola

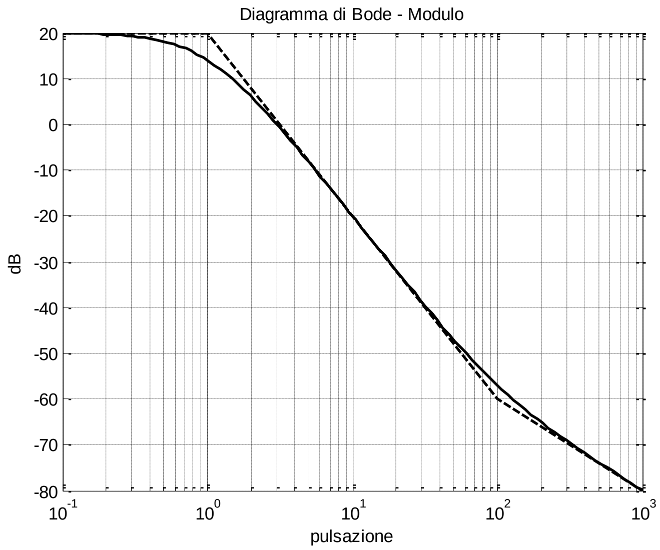
$$\dot{y}(t) = (-1 + j)\gamma_1 e^{(-1+j)t} + (-1 - j)\gamma_2 e^{(-1-j)t}$$

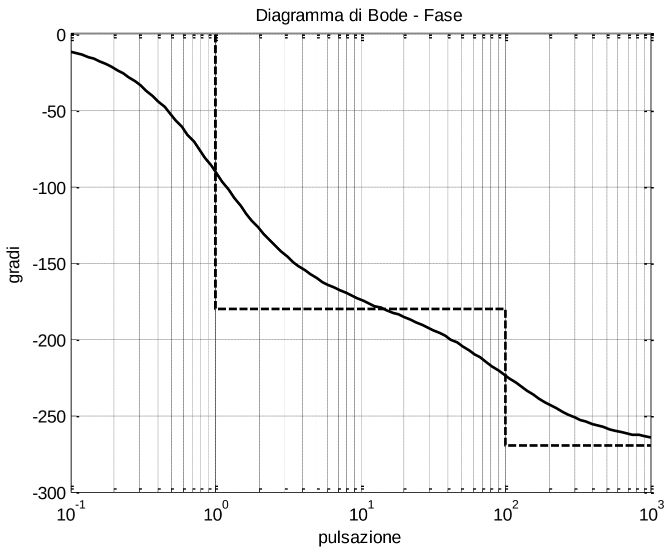
da cui si ottiene che $\dot{y}(0) = (-1 + j)\gamma_1 + (-1 - j)\gamma_2 = CAx(0) = 1$. Dalle equazioni ottenute si ricava che $\gamma_1 = -\frac{1}{2}j$ e $\gamma_2 = \frac{1}{2}j$, e quindi $y(t) = e^{-t}\frac{1}{2j}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) = e^{-t}\sin(t)$.

2) Un metodo alternativo consiste nel calcolare la trasformata di Laplace del movimento libero dell'uscita del sistema come $Y_L(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) = \frac{1}{(s+1)^2+1}$, che è la trasformata di Laplace di $e^{-t}\sin(t)$.

ESERCIZIO 4

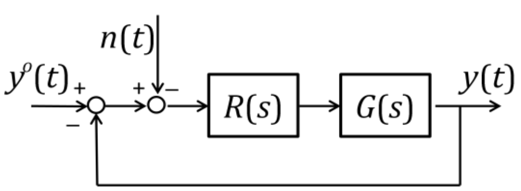
Si consideri il sistema di ordine 2, la cui funzione di trasferimento $G(s)$ è rappresentata attraverso i seguenti diagrammi di Bode (reali e asintotici).





A. Considerando il caso in cui $R(s) = 1$,

a. Si analizzino le proprietà di stabilità del sistema <u>ad anello chiuso</u> in figura:



Osservando i diagrammi di Bode di L(s)=G(s) si nota che le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono verificate. Infatti

- *Ricordando che, in base alle ipotesi date, il sistema è di ordine 2, gli autovalori del sistema corrispondono con i due poli della funzione di trasferimento G(s), che a loro volta sono individuati dai valori di ω in corrispondenza dei quali si verifica un cambio di pendenza di negativo di 20dB/decade nel diagramma del modulo. Si nota che, in corrispondenza di ω=1 rad/s, il diagramma di Bode del modulo di G(s) subisce un cambio di pendenza (negativo) di 2x20dB/decade. Questo permette di individuare la coppia di poli. In corrispondenza di questa coppia di poli si verifica una variazione di fase negativa di 180°, che permette di concludere che tali poli presentano parte reale negativa. Si conclude quindi che gli autovalori cercati hanno parte reale negativa, e che il sistema avente funzione di trasferimento G(s)=L(s) è asintoticamente stabile. Inoltre, è lecito ipotizzare che i poli suddetti siano reali, dato che lo scostamento tra il diagramma del modulo reale e quello asintotico in ω=1 rad/s è 6 dB.*
- *Il diagramma di Bode del modulo attraversa l'asse a 0dB una sola volta dall'alto in basso.*
- *La funzione di trasferimento L(s)=G(s) è strettamente propria, in quanto* $|L(j\omega)| \to 0$ *se* $\omega \to \infty$.

In base al criterio di Bode è ora possibile evincere che il sistema di controllo retroazionato in figura è asintoticamente stabile. Infatti

- *Dato che |L(jω)|= 20 dB per* $\omega \to 0$, *|μ|=10 in scala lineare.*
- *Dato che ∡ G(jω)=0 per* $\omega \to 0$, *il segno del guadagno μ è positivo.*
- *Dai grafici si osserva che la pulsazione critica è circa pari a* $\omega_c = 3 rad/s$, *in corrispondenza della quale la fase critica è* $\varphi_c > -150°$. *Da questo segue che* $\varphi_m = 180° - |\varphi_c| > 30°$.

b. Basandosi unicamente sull'analisi dei diagrammi di Bode in figura, si scriva la funzione di trasferimento approssimante (ai poli dominanti) tra il segnale $y^o(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Dato che $\varphi_m \cong 30°$*<75° la funzione di trasferimento che approssima la funzione di sensitività complementare cercata risulta:*

$$F_{appr}(s) = \frac{\mu_F}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove:

- *dato che il tipo di L(s) è g=0, il guadagno della funzione di sensitività complementare risulta*
$$\mu_F = \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{10}{11}$$
- *la pulsazione naturale dei poli complessi coniugati risulta* $\omega_n = \omega_c = 3\ rad/s$
- *lo smorzamento dei poli complessi coniugati risulta* $\xi \cong \frac{\varphi_m}{100} = 0.3$

B. Nel caso in cui $R(s) = \mu$, con $\mu \geq 1$, si determini approssimativamente (se esiste) il valore massimo di μ che garantisca asintotica stabilità allo schema retroazionato in figura.

Si noti che il valore della pulsazione in corrispondenza della quale $\measuredangle L(j\omega) \cong -180°$ *è compreso tra* $\omega = 10\ rad/s$ *e* $\omega = 20\ rad/s$. *Per essere conservativi, si approssimi tale punto "di passaggio" con* $\omega \cong 10\ rad/s$. *Osservando il diagramma del modulo si ottiene che* $|L(j10)| \cong -20dB = 0.01$. *Pertanto, si può concludere che, se* $\mu < 100$, *il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile. Si noti infine che tale conclusione è stata raggiunta grazie all'ipotesi aggiuntiva che* $\mu \geq 1$, *in corrispondenza della quale le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode sono sempre verificate.*