INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME E SOLUZIONI

11 settembre 2013

Anno Accademico 2012/2013

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalla equazione scalare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

dove

$$f(x,u) = x^2 + (u+1)x + u$$

A. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$.

Si definiscano le variabili $\delta x = x - \bar{x}$ e $\delta u = u - \bar{u}$. Il sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ risulta:

$$\dot{\delta x} = A(\bar{x}, \bar{u})\delta x + B(\bar{x}, \bar{u})\delta u$$

dove $A(\bar{x}, \bar{u}) = 2\bar{x} + \bar{u} + 1$ e $B(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x} + 1$.

B. Sia l'ingresso costante, cioè $u(t) = \bar{u}$. Si determini il numero di condizioni di equilibrio possibili al variare del valore di $\bar{u}$.

L'equazione del sistema all'equilibrio si ottiene ponendo $\dot{x} = 0$ e $u(t)=\bar{u}$:

$$\bar{x}^2 + (\bar{u}+1)\bar{x} + \bar{u} = (\bar{x}+1)(\bar{x}+\bar{u}) = 0$$

Il numero di condizioni di equilibrio possibili è due: $\bar{x} = -1$ e $\bar{x} = -\bar{u}$.

C. Si valutino le proprietà di stabilità degli equilibri trovati per $\bar{u} = -1$.

Le condizioni di equilibrio determinate sono due:

- *In corrispondenza di $(\bar{x}, \bar{u}) = (-1, -1)$, $A(\bar{x}, \bar{u}) = -2$. La condizione di equilibrio risulta essere asintoticamente stabile.*
- *In corrispondenza di $(\bar{x}, \bar{u}) = (1, -1)$, $A(\bar{x}, \bar{u}) = 2$. La condizione di equilibrio risulta essere instabile.*

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & -\alpha x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = & x_1(t) - \alpha x_2(t) \\ y(t) = & \alpha^2 x_2(t) - u(t) \end{cases}$$

A. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema, motivando brevemente le risposte:

a. è lineare o non lineare? *Il sistema è lineare: f(x,u) è lineare.*
b. è statico o dinamico? *Il sistema è dinamico.*
c. è strettamente proprio? *No, il sistema è proprio non strettamente.*
d. è MIMO? *Il sistema è SISO.*
e. qual è l'ordine del sistema? *L'ordine è n=2.*

B. Analizzare le proprietà di stabilità del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Le matrici A, B, C, D del sistema lineare risultano:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \; \alpha^2], D = -1$$

La matrice A presenta due autovalori coincidenti $\lambda = \alpha$ aventi molteplicità algebrica pari a 2, mentre molteplicità geometrica pari a 1. Pertanto i modi propri del sistema sono $e^{-\alpha t}$ e $te^{-\alpha t}$:

- *Se $\alpha > 0$ il sistema è asintoticamente stabile*
- *Se $\alpha \leq 0$ il sistema è instabile.*

C. Si determini la risposta libera dell'uscita del sistema (partendo dalla condizione iniziale $\big(x_1(0), x_2(0)\big) = (1{,}0))$ nel caso in cui $\alpha = 1$.

Come evidenziato nella risposta al punto B., i modi propri del sistema sono e^{-t} e te^{-t}, da cui segue che

$$y(t) = \gamma_1 e^{-t} + \gamma_2 te^{-t}$$

Si calcola che $y(0) = \gamma_1 = Cx(0) = 0$. Inoltre

$$\dot{y}(t) = -\gamma_1 e^{-t} + \gamma_2 e^{-t} - \gamma_2 te^{-t}$$

da cui segue che $\dot{y}(0) = -\gamma_1 + \gamma_2 = CAx(0) = 1$. Da cui segue che $\gamma_2 = 1$. Si ottiene quindi che la risposta libera dell'uscita è:

$$y(t) = te^{-t}$$

D. Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

Si calcola che

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{-s(s + 2\alpha)}{(s + \alpha)^2}$$

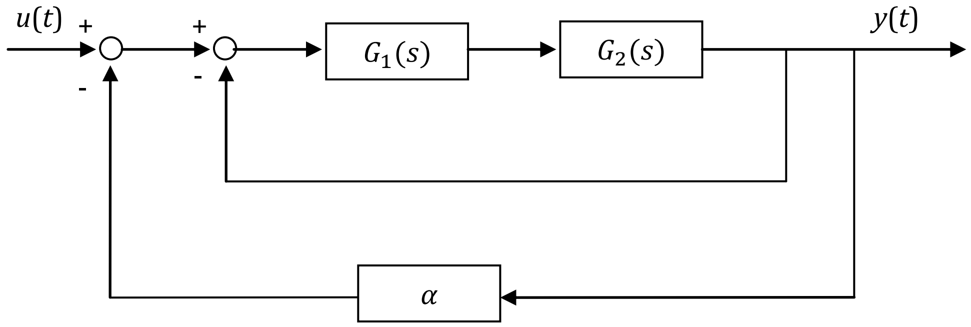
E. Nel caso $\alpha = 1$ si determinino zeri, poli, guadagno generalizzato e tipo della funzione di trasferimento ottenuta al punto precedente.

Nel caso $\alpha = 1$, $G(s) = \frac{-s(s+2)}{(s+1)^2}$. Si ottiene che

- *Zeri: s=0, s=-2*
- *Poli: s=-1 (due poli coincidenti)*
- *Tipo: g=-1 (presenza di uno zero nell'origine)*
- *Guadagno generalizzato: $\mu = \left.\frac{G(s)}{s}\right|_{s=0} = -2$*

ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente schema a blocchi:



A. Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva tra l'ingresso *u* e l'uscita *y*.

Si calcola che

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + (1+\alpha)G_1(s)G_2(s)}$$

B. Esiste, nel presente schema, un sistema la cui asintotica stabilità è necessaria per garantire l'asintotica stabilità del sistema complessivo?

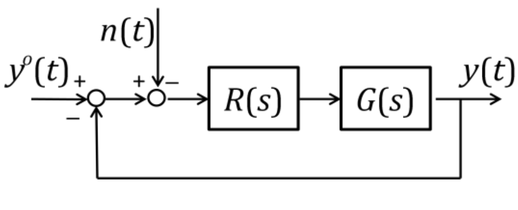
Per garantire che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile non è necessario che nessuna delle funzioni di trasferimento presenti sia asintoticamente stabile. Infatti sia $G_1(s)$ che $G_2(s)$ sono inserite in anelli di retroazione.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di ordine 2, la cui funzione di trasferimento $G(s)$ è

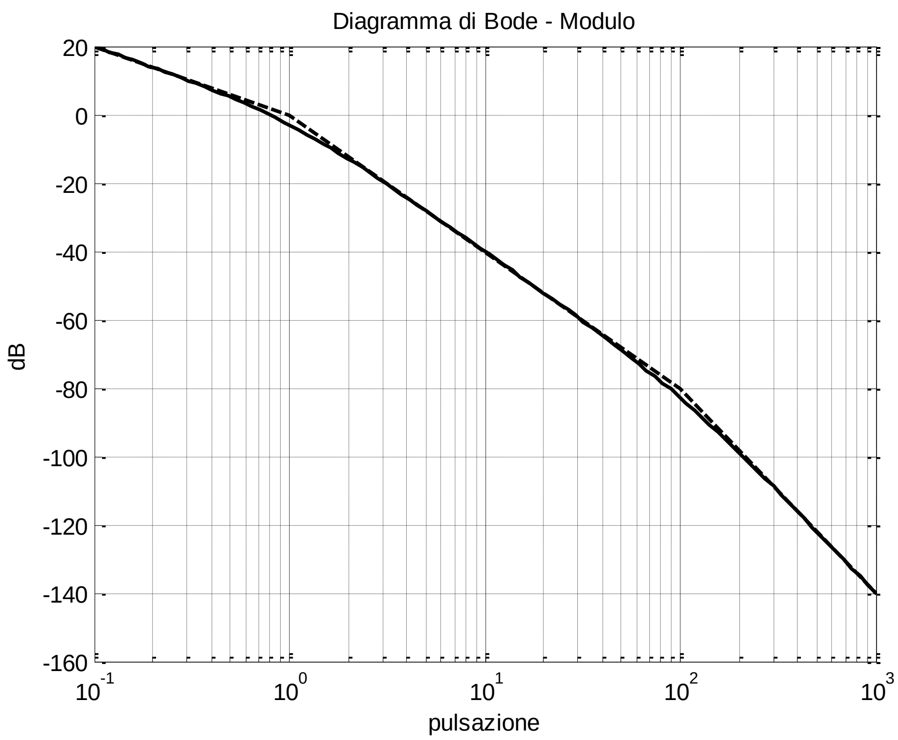
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+s/100)}$$

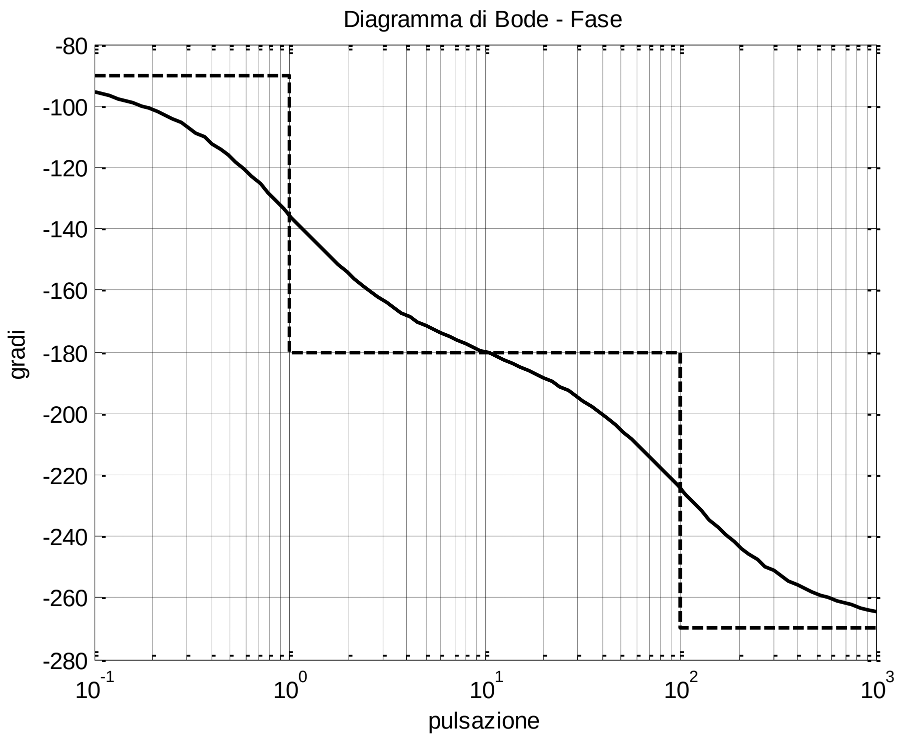
Si consideri il seguente schema, dove il regolatore è $R(s) = \frac{1}{s}$.



A. Si analizzino le proprietà di stabilità del sistema <u>ad anello chiuso</u> in figura.

I diagrammi di Bode corrispondenti alla funzione di trasferimento L(s)=R(s)G(s) sono mostrati nelle seguenti figure.





Le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono verificate. Infatti

- *L(s) non presenta poli a parte reale positiva.*
- *Il diagramma del modulo di L(s) attraversa una sola volta, dall'alto in basso, l'asse a 0 dB.*
- *L(s) è strettamente propria.*

Si calcola che:

- *Il margine di fase di L(s) è φ_m>0 in quanto la fase critica $0 > \varphi_c$>-180.*
- *Il guadagno di L(s) è $\mu = 1$>0*

In base al criterio di Bode, il sistema ad anello chiuso corrispondente è asintoticamente stabile.

Inoltre:

- *La pulsazione critica risulta essere circa* $\omega_c = 1\ rad/s$.
- *Il valore della fase critica si può calcolare con l'ausilio del regolo delle fasi, oppure attraverso il seguente calcolo:*
$$\varphi_c = \measuredangle L(j\omega_c) = -90° - \measuredangle(1+j) - \measuredangle\left(1+\frac{j}{100}\right) = -90° - \text{atan}(1) - \text{atan}\left(\frac{1}{100}\right)$$
$$= -90° - 45° - 0.3° \cong -135.3°$$
Si calcola quindi che $\varphi_m = 180 - |\varphi_c| = 44.7°$.

B. Si scriva la funzione di trasferimento approssimante (ai poli dominanti) tra il segnale $y^o(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Dato che $\varphi_m \cong 44.7°<75°$ *la funzione di trasferimento che approssima la funzione di sensitività complementare cercata risulta:*

$$F_{appr}(s) = \frac{\mu_F}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove:

- *dato che il tipo di L(s) è g=1, il guadagno della funzione di sensitività complementare risulta* $\mu_F = 1$
- *la pulsazione naturale dei poli complessi coniugati risulta* $\omega_n = \omega_c = 1\ rad/s$
- *lo smorzamento dei poli complessi coniugati risulta* $\xi \cong \frac{\varphi_m}{100} = 0.47$

C. Si determini l'ampiezza della sinusoide in uscita in condizioni stazionarie in risposta all'ingresso $n(t) = 10\sin(10t)$.

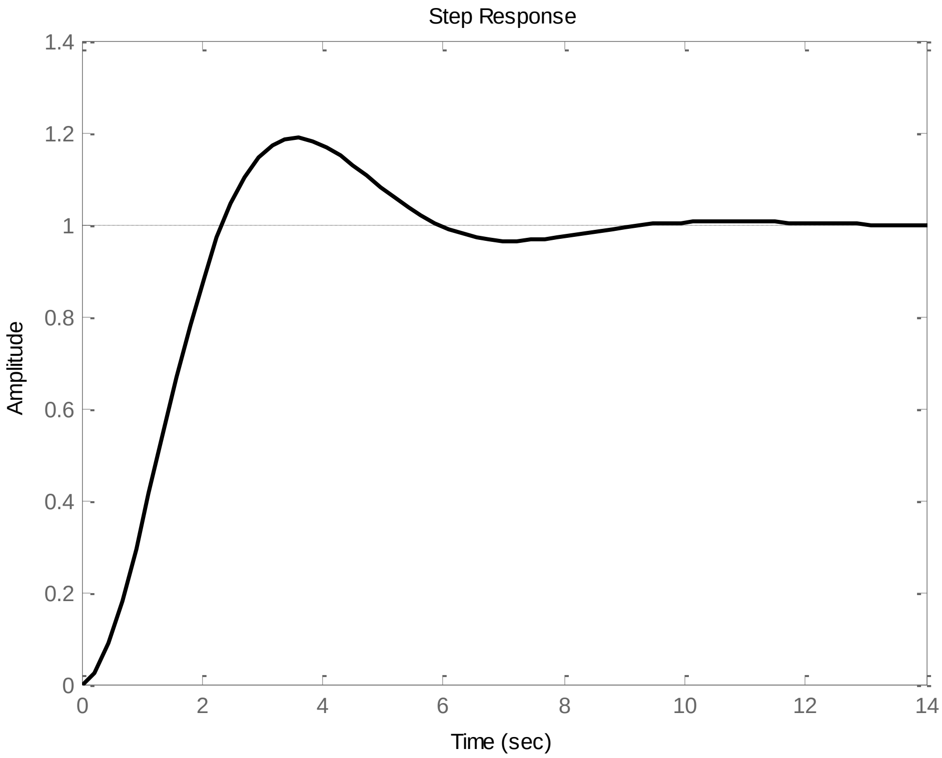
La funzione di trasferimento tra il disturbo n(t) e l'uscita y(t) risulta essere –F(s), dove F(s) è la funzione di sensitività complementare. Dato che la pulsazione $\omega = 10$ *rad/s della sinusoide in ingresso è maggiore di* $\omega_c = 1$ *rad/s, si ottiene che* $|F(j10)| \cong |L(j10)| \cong -40dB = 0.01$. *L'ampiezza della sinusoide in uscita in condizioni stazionarie in risposta all'ingresso* $n(t) = 10sin\,(10t)$ *risulta quindi essere pari a 10·* $|F(j10)| = 0.1$.

D. Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino $y^o(t) = sca(t)$ (tenendo conto delle dinamiche di risposta risultanti, della sovraelongazione massima percentuale - $S\% = 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$ -, del periodo di oscillazione della risposta smorzata - $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ - e del guadagno del sistema retroazionato).

In base alla risposta al punto B., si ottiene che

- *Il tempo di assestamento è pari a* $T_{a1} \cong 4.6\tau$ *unità di tempo, dove* $\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = 2.12$ *unità di tempo.*
- *La sovraelongazione percentuale è pari a* $S\% \cong 18\%$.
- *Il periodo di oscillazione è pari a* $T_P \cong 7.12$ *unità di tempo.*
- *Il guadagno è* $\mu = 1$.

La risposta allo scalino risulta essere qualitativamente equivalente a quella nella figura seguente.



Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
2
4
6
8
10
12
14