INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME E SOLUZIONI

20 settembre 2013

Anno Accademico 2012/2013

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1^3(t)\sin\left(\frac{\pi}{2}u(t)\right) + (1-u(t)^2)x_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) - 2x_2(t) + u(t)^3 \\
y(t) &= x_2(t) + u(t)
\end{aligned}$$

A. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema, motivando brevemente le risposte:

a. è lineare o non lineare? *Il sistema è non lineare: f(x,u) è non lineare.*
b. è statico o dinamico? *Il sistema è dinamico.*
c. è strettamente proprio? *No, il sistema è proprio non strettamente.*
d. è MIMO? *No. Il sistema è SISO.*
e. qual è l'ordine del sistema? *L'ordine è n=2.*

B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.

Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$. *Il sistema linearizzato è il seguente:*

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2\end{bmatrix} = A(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u})\begin{bmatrix}\delta x_1 \\ \delta x_2\end{bmatrix} + B(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u})\,\delta u$$

$$\delta y = C(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u})\begin{bmatrix}\delta x_1 \\ \delta x_2\end{bmatrix} + D(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u})\,\delta u$$

dove

$$A(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u}) = \begin{bmatrix}3\bar{x}_1^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{u}\right) + 1 - \bar{u}^2 & 0 \\ 2\bar{x}_1 & -2\end{bmatrix}, B(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u}) = \begin{bmatrix}\bar{x}_1^3\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\bar{u}\right) - 2\bar{x}_1\bar{u} \\ 3\bar{u}^2\end{bmatrix}$$

$$C(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u}) = [0 \quad 1], \qquad D(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u}) = 1$$

C. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = -1$. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati.

Le equazioni del sistema all'equilibrio si ottengono ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ *e u(t)=-1. L'unica condizione di equilibrio ottenuta è* $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u}) = \left(0, -\frac{1}{2}, -1\right)$. *Linearizzando attorno a questo punto di equilibrio si ottiene:*

$$A(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u}) = \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

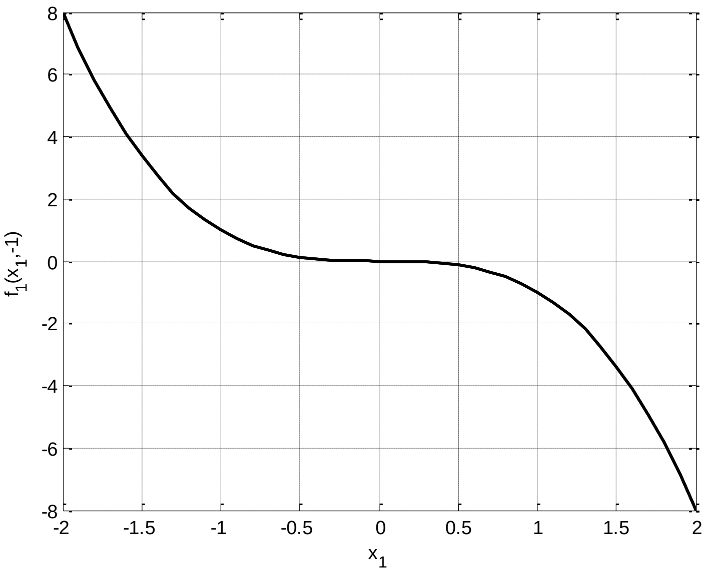
i cui autovalori sono $\lambda = -2$ *e* $\lambda = 0$. *Dato che il sistema linearizzato presenta un autovalore nullo, da questo non è possibile trarre alcuna conclusione a proposito delle proprietà di stabilità dell'equilibrio.*

E' possibile trarre conclusioni a proposito delle proprietà di stabilità di questo equilibrio applicando il seguente metodo (quanto esposto qui sotto non era richiesto in fase d'esame):

- *Notare che il sistema non lineare è triangolare, e quindi a cascata;*

- *Notare che l'autovalore nullo del sistema linearizzato complessivo è relativo alla prima equazione, indipendente dalla variabile* x_2*. Da qui si conclude che quindi lo studio della stabilità dell'equilibrio* $\bar{x}_1 = 0$ *di questa equazione porterebbe a una conclusione relativa alla stabilità dell'equilibrio analizzato;*
- *Studiare le proprietà di stabilità dell'equilibrio* $\bar{x}_1 = 0$ *della prima equazione attraverso il metodo grafico.*

Si ottiene quindi che $f_1(x_1, -1) = -x_1^3$*, che corrisponde alla curva mostrata qui sotto:*



Si ottiene che

- *per valori di* x_1 *<0,* $f_1(x_1, -1)$*>0 (il valore di x tende ad aumentare nel tempo)*
- *per valori di* x_1*>0,* $f_1(x_1, -1)$*<0 (il valore di x tende a diminuire nel tempo)*

Il movimento di equilibrio $\bar{x}_1 = 0$ *risulta essere asintoticamente stabile. Da questo, in base al fatto che il sistema complessivo presenta una struttura a cascata (e anche in virtù della linearità della seconda equazione rispetto alla variabile* x_2*) si può concludere che l'equilibrio* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \left(0, -\frac{1}{2}, -1\right)$ *è asintoticamente stabile.*

D. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati.

Le equazioni del sistema all'equilibrio cercato si ottengono ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ *e u(t)=0. L'unica condizione di equilibrio ottenuta è* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (0,0,0)$*. Linearizzando attorno a questo punto di equilibrio si ottiene:*

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda = -2$ *e* $\lambda = 1$*. Dato che il sistema linearizzato presenta un autovalore a parte reale positiva, si conclude che l'equilibrio analizzato è instabile.*

E. Si calcoli il movimento dell'uscita a partire dalla condizione iniziale $\left(x_1(0), x_2(0)\right) = (0,1)$ nei seguenti casi:

- $u(t) = \bar{u} = -1$
- $u(t) = \bar{u} = 0$

In entrambi i casi analizzati, si noti che il sistema ha una struttura a cascata e che la prima equazione è indipendente dalla variabile x_2. Inoltre la condizione iniziale $x_1(0) = 0$ è un equilibrio in entrambi i casi (sia $\bar{u} = -1$ che $\bar{u} = 0$). Perciò $x_1(t) = 0$ per $t \geq 0$.

Inoltre la seconda equazione risulta lineare rispetto alla variabile x_2 mentre il termine $x_1^2(t) + u(t)^3 = 0 + \bar{u}^3$ costituisce di fatto un ingresso esogeno per tale equazione, e pertanto

$$x_2(t) = e^{-2t}x_2(0) + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}(x_1^2(\tau) + u(\tau)^3)d\tau$$

- *Se $u(t) = \bar{u} = -1$, si calcola che $x_2(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$.*
- *Se $u(t) = \bar{u} = 0$, si calcola che $x_2(t) = e^{-2t}$.*

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = & -x_1(t) - ax_2(t) + u(t) \\ y(t) = & x_1(t) + bx_2(t) \end{cases}$$

A. Analizzare le proprietà di stabilità del sistema al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

Le matrici A, B, C, D del sistema lineare risultano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1\ b], D = 0$$

Il polinomio caratteristico relativo alla matrice A è $p_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + 1$. Si conclude che:

- *Se $a > 0$ il sistema è asintoticamente stabile.*
- *Se $a = 0$ il sistema è semplicemente stabile (presenta due autovalori distinti – ognuno con molteplicità algebrica e geometrica pari a 1 - con parte reale nulla).*
- *Se $a < 0$ il sistema è instabile.*

B. Si determini la funzione di trasferimento del sistema. In particolare, si individuino:

- Tipo.
- Guadagno generalizzato.
- Poli (se complessi coniugati, si determinino la loro pulsazione naturale e il loro smorzamento).
- Zeri.

La funzione di trasferimento del sistema risulta

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1 + sb}{s^2 + as + 1}$$

- *Tipo: g=0.*
- *Guadagno generalizzato: dato che g=0, si calcola $\mu = G(0) = 1$.*

- *Poli: i poli sono* $s=-\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}$. *Se* $|a|<2$ *i poli sono complessi coniugati, aventi*
    - *pulsazione naturale* $\omega_n = 1$,
    - *smorzamento* $\xi = \frac{a}{2}$.
- *Zeri: è presente uno zero in s=-1/b (se* $b \neq 0$*).*

C. Si determini <u>la risposta dell'uscita</u> del sistema (risposta libera + risposta forzata), ottenuta partendo dalla condizione iniziale $(x_1(0), x_2(0)) = (1,0))$ con ingresso $u(t) = sca(t)$, nei seguenti casi:

- $a = 2, b = 1$.
- $a = 2, b = 0$.

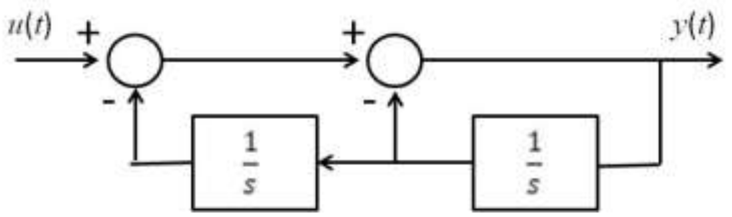
Per rispondere alla domanda, si ricordi che la trasformata di Laplace del segnale di uscita (Y(s)) si ottiene come $Y(s) = G(s)U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0)$, *dove U(s)=1/s rappresenta la trasformata di Laplace del segnale di ingresso a scalino di ampiezza unitaria.*

Si ottiene:

- *Se* $a = 2, b = 1, Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s}$, *che corrisponde a y(t)=sca(t).*
- Se $a = 2, b = 0, Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}U(s) + \frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{1}{s}$, *che corrisponde a y(t)=sca(t).*

ESERCIZIO 3

si consideri il seguente schema a blocchi:



A. Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso *u*(*t*) e l'uscita *y*(*t*). In particolare, si individuino:

- Tipo.
- Guadagno generalizzato.
- Poli (se complessi coniugati, si determinino la loro pulsazione naturale e il loro smorzamento).
- Zeri.

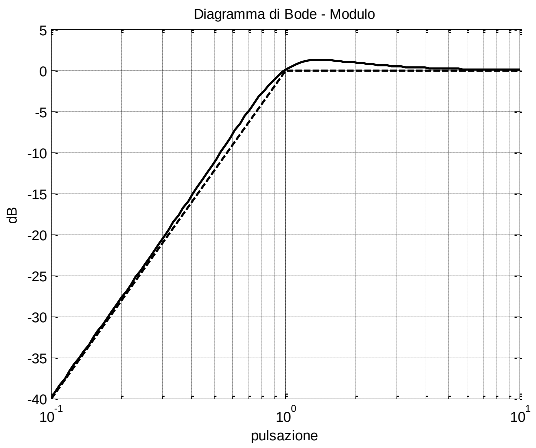
La funzione di trasferimento del sistema risulta

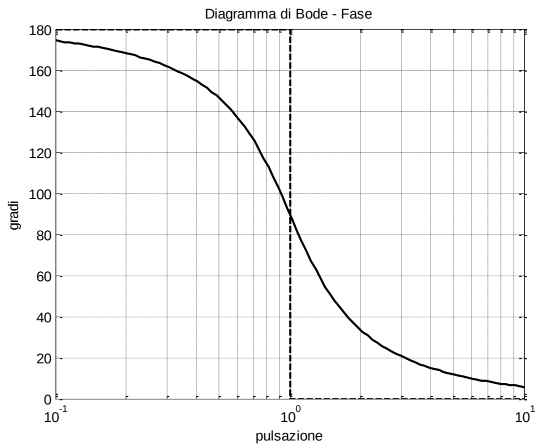
$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$$

- *Tipo: g=-2 (presenza di due zeri nell'origine)*
- *Guadagno generalizzato:* $\mu = \left.\frac{G(s)}{s^2}\right|_{s=0} = 1$
- *Zeri: s=0 (due zeri coincidenti)*
- *Poli: due poli complessi coniugati aventi*

- *pulsazione naturale* $\omega_n = 1$,
    - *smorzamento* $\xi = \frac{1}{2}$.

B. Si disegnino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento ottenuta.



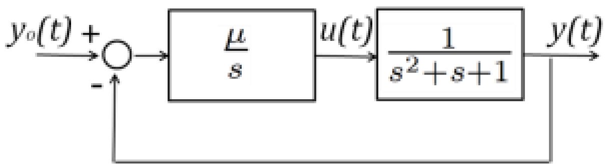


C. Si determini, in modo approssimato, l'ampiezza delle sinusoidi in uscita in condizioni stazionarie in risposta agli ingressi $u(t) = \sin(0.1\, t)$ e $u(t) = \sin(10\, t)$.

L'ampiezza della sinusoide in uscita in condizioni stazionarie in risposta all'ingresso $u(t) = sin\,(\omega t)$ *risulta essere pari a* $|G(j\omega)|$, *dove* $|G(j0.1)| = -40dB = 0.01$ *e* $|G(j10)| = 0dB = 1$.

ESERCIZIO 4

Si consideri lo schema di controllo retroazionato in figura

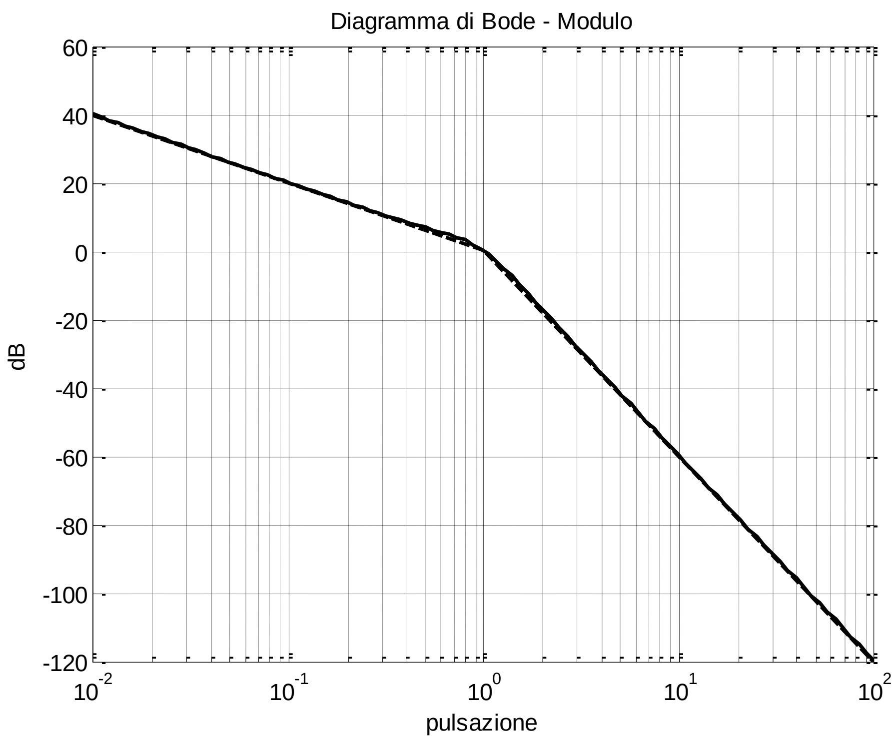


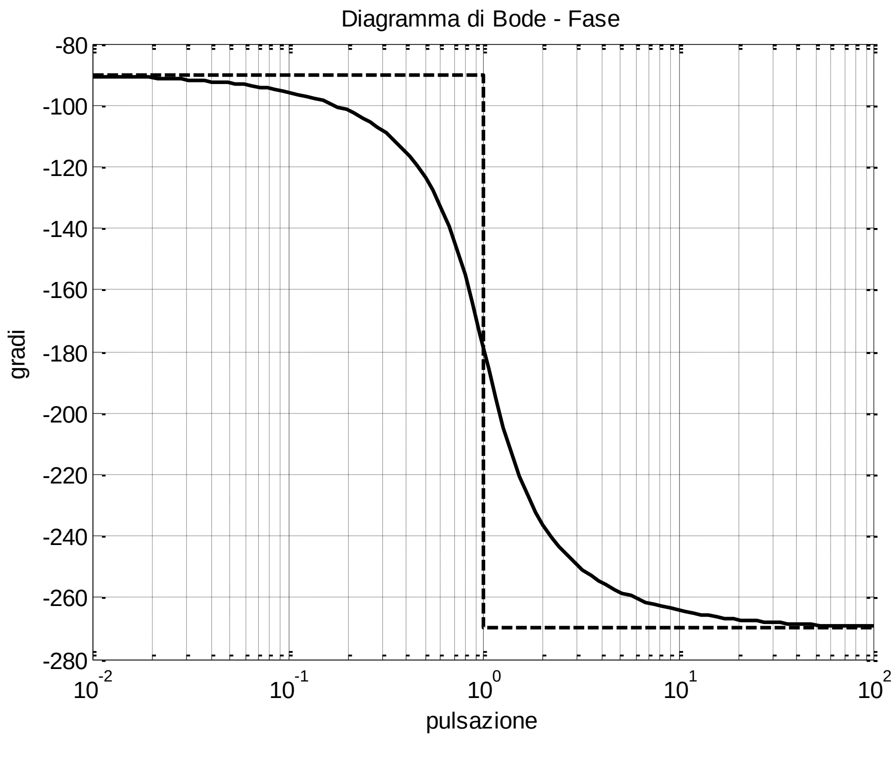
A. Si enunci con precisione il criterio di Bode (specificando con precisione le ipotesi di applicabilità).

Si veda il testo di riferimento.

B. Nel caso considerato, il criterio di Bode è applicabile?

I diagrammi di Bode di L(s)(per μ=1) sono mostrati nella figura seguente.





Le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono verificate per ogni valore non nullo di μ. Infatti

- *L(s) non presenta poli a parte reale positiva.*
- *Il diagramma del modulo di L(s) attraversa una sola volta, dall'alto in basso, l'asse a 0 dB.*
- *L(s) è strettamente propria.*

C. In base all'applicazione del criterio di Bode, per quali valori del parametro μ è possibile concludere che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile, e per quali valori si conclude che il sistema non è asintoticamente stabile?

Il sistema risulta essere asintoticamente stabile se e solo se:

- *Il guadagno di L(s) è μ>0*
- *Il margine di fase di L(s) è φ_m>0 e cioè la fase critica* $0 > \varphi_c$*>-180. Questo si verifica (osservando i grafici) se* $\mu < 1$.

D. Si ponga $\mu = 0.1$. Si scriva la funzione di trasferimento approssimata tra il segnale $y_o(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Ponendo $\mu = 0.1$*, si ottiene che la pulsazione critica è circa* $\omega_c = 0.1$ *rad/s, in corrispondenza della quale (si vedano i diagrammi di Bode) la fase critica risulta circa -95° . Un calcolo più preciso è il seguente:*

$$\varphi_c = ∡L(j\omega_c) = -90° - ∡(1 - 0.01 + j0.1) - 90° - \operatorname{atan}\left(\frac{0.1}{0.99}\right) = -95.8°$$

Si calcola quindi che $\varphi_m = 180 - |\varphi_c| \cong 84°$*. Dato che Dato che* φ_m *>75° la funzione di trasferimento che approssima la funzione di sensitività complementare cercata risulta:*

$$F_{appr}(s) = \frac{\mu_F}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$$

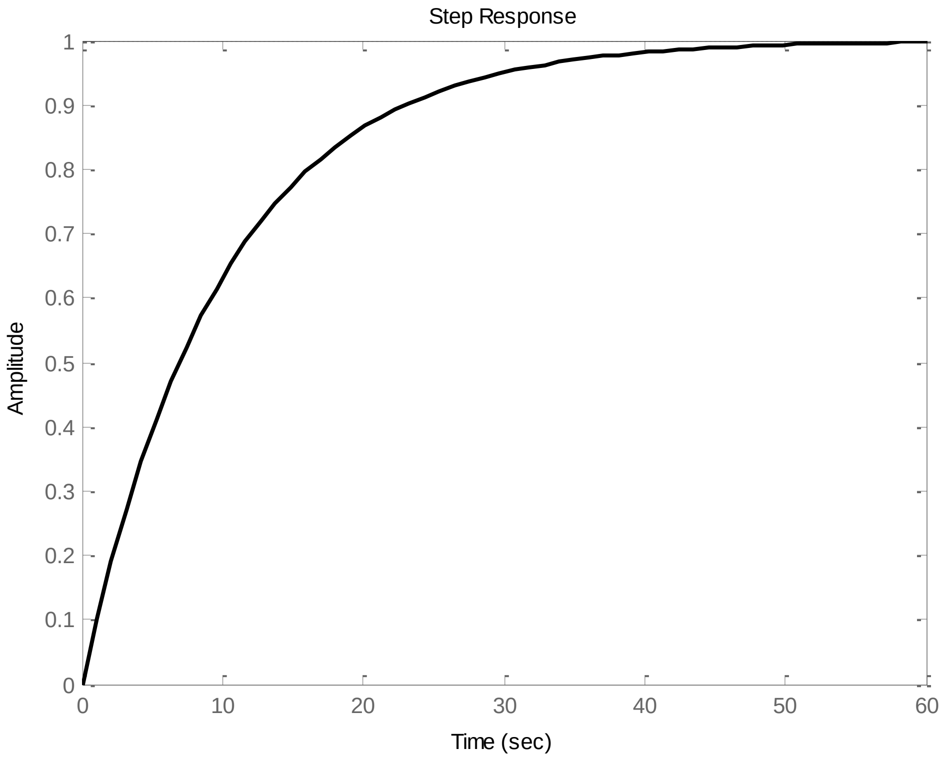
dove, dato che il tipo di L(s) è g=1, il guadagno della f. di sensitività complementare risulta $\mu_F = 1$.

E. In base alla risposta data alla domanda D., si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino $y_o(t) = sca(t)$.

In base alla risposta al punto D., si ottiene che

- *Il tempo di assestamento è pari a* $T_{a1} \cong 4.6\tau$ *unità di tempo, dove* $\tau = \frac{1}{\omega_c} = 10$ *unità di tempo.*
- *Dato che non sono presenti poli complessi coniugati, la sovraelongazione percentuale è nulla, e la risposta non presenta oscillazioni.*
- *Il guadagno è* $\mu = 1$.

L'andamento qualitativo della risposta allo scalino $y_o(t) = sca(t)$ è quello mostrato nella figura seguente.


Step Response
Amplitude
Time (sec)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
40
50
60