INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME E SOLUZIONI

18 febbraio 2014

Anno Accademico 2012/2013

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= (u(t) + x_1^2(t))x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t)x_2(t) + u(t)\\ y(t) &= x_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

A. Spiegare cosa si intende per linearizzazione nell'intorno di uno stato di equilibrio e qual è la sua utilizzazione.

Si veda il testo adottato.

B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.

Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$. *Il sistema linearizzato è il seguente:*

$$\begin{bmatrix}\delta \dot{x}_1\\ \delta \dot{x}_2\end{bmatrix} = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{bmatrix} + B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\,\delta u$$

$$\delta y = C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{bmatrix} + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\,\delta u$$

dove

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix}2\bar{x}_1\bar{x}_2 & \bar{x}_1^2 + \bar{u}\\ -2\bar{x}_2 & -2\bar{x}_1\end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix}\bar{x}_2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = [0 \quad 1], \qquad D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = 1$$

C. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = -1$. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati.

Le equazioni del sistema all'equilibrio si ottengono ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ *e u(t)=-1. Le due possibili condizioni di equilibrio sono*

1. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$. *Linearizzando attorno a questo punto di equilibrio si ottiene:*

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda = -2$ *e* $\lambda = -2$. *Dato che il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, il corrispondente equilibrio è asintoticamente stabile per il sistema non lineare di partenza.*

2. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \left(-1, \frac{1}{2}, -1\right)$. *Linearizzando attorno a questo punto di equilibrio si ottiene:*

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & +2\end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda = -2$ *e* $\lambda = -2$. *Dato che il sistema linearizzato è instabile, il corrispondente equilibrio è instabile per il sistema non lineare di partenza.*

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & ax_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = & -3x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = & x_2(t) \end{cases}$$

A. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema, motivando brevemente le risposte:

a. è lineare o non lineare? *Il sistema è lineare.*
b. è statico o dinamico? *Dinamico.*
c. è strettamente proprio? *Sì.*
d. è MIMO? *No, è SISO.*
e. qual è l'ordine del sistema? *L'ordine è n=2.*

B. Analizzare le proprietà di stabilità del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Le matrici A, B, C, D del sistema lineare risultano:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0\ 1], D = 0$$

La matrice A di sistema ha auto valori $\lambda = a, \lambda = -2$. *Si conclude che:*

- *Se* $a > 0$ *il sistema è instabile.*
- *Se* $a = 0$ *il sistema è semplicemente stabile (presenta due autovalori distinti – ognuno con molteplicità algebrica e geometrica pari a 1 – uno dei quali con parte reale nulla).*
- *Se* $a < 0$ *il sistema è asintoticamente stabile.*

C. Si calcoli la risposta libera del sistema, con condizione iniziale $(x_1(0), x_2(0)) = (1,0)$ per i seguenti valori del parametro a:

- $a = 0$. *L'uscita del sistema risulta essere combinazione lineare dei modi e pertanto* $y(t) = \gamma_1 + \gamma_2 e^{-2t}$. *Si ottiene* $y(0) = \gamma_1 + \gamma_2 = Cx(0)=0, \dot{y}(0) = -2\gamma_2 = CAx(0) = -3$. *Si ottiene quindi che* $\gamma_1 = -\frac{3}{2}, \gamma_2 = \frac{3}{2}$.
- $a = -2$. *In questo caso il sistema presenta due autovalori coincidenti (con molteplicità algebrica pari a 2 e molteplicità geometrica pari a 1). L'uscita del sistema risulta essere combinazione lineare dei modi e pertanto*

$$y(t) = \gamma_1 e^{-2t} + \gamma_2 t e^{-2t}$$

Si calcola che $y(0) = \gamma_1 = Cx(0) = 0$. *Inoltre*

$$\dot{y}(t) = -2\gamma_1 e^{-t} + \gamma_2 e^{-2t} - 2\gamma_2 t e^{-t}$$

da cui segue che $\dot{y}(0) = -2\gamma_1 + \gamma_2 = CAx(0) = -3$. *Da cui segue che* $\gamma_2 = -3$. *Si ottiene quindi che la risposta libera dell'uscita è:*

$$y(t) = -3te^{-2t}$$

D. Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

Si ottiene

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s - 3 - a}{(s - a)(s + 2)}$$

E. Impiegando il teorema del valore finale, si determini il limite per $t \to \infty$ della risposta forzata dell'uscita all'ingresso $u(t) = sca(t)$, nei seguenti casi:

- $a = 0$.
- $a = -2$.

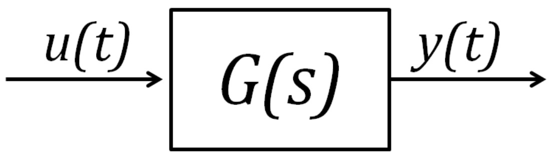
Si calcola che la trasformata di Laplace del movimento forzato dell'uscita è Y(s)=G(s)U(s), dove U(s)=1/s.

Si considerano ora i due casi:

- $a = 0$. Si ha:
$$Y(s) = \frac{s - 3}{s^2(s + 2)}$$
Per il Teorema della Risposta Finale si calcola
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = -\infty$$
- $a = -2$. Si ha:
$$Y(s) = \frac{s - 1}{s(s + 2)^2}$$
Per il Teorema della Risposta Finale si ha
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = -\frac{1}{4}$$

ESERCIZIO 3

A. Si consideri il seguente sistema di ordine 1:

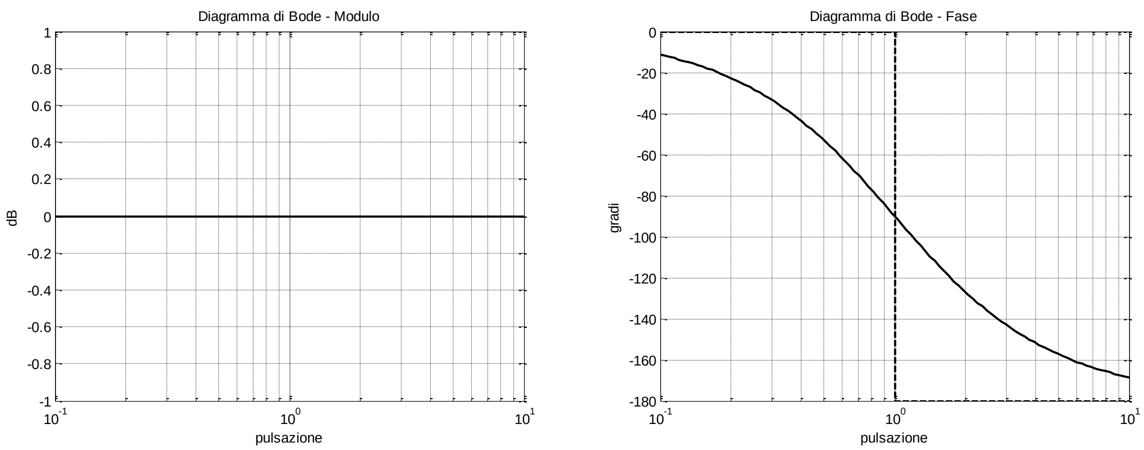


dove $G(s) = \frac{1-s}{1+s}$.

A.1 Si individuino, relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$:

- Tipo. *Il tipo è g=0.*
- Guadagno. *Il guadagno è μ=G(0)=1.*
- Poli. *Il polo è s=-1.*
- Zeri. *l polo è s=1.*
- Proprietà di stabilità. *Dato che il polo di G(s), negativo, corrisponde con l'unico auto valore del sistema, il sistema risulta essere asintoticamente stabile.*

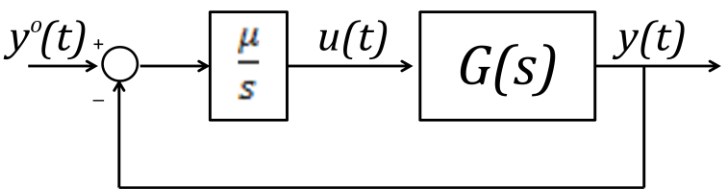
A.2 Si disegnino i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$.



A.3 Si determini l'ampiezza della sinusoide in uscita di regime in risposta all'ingresso e $u(t) = \sin(10\,t)$.

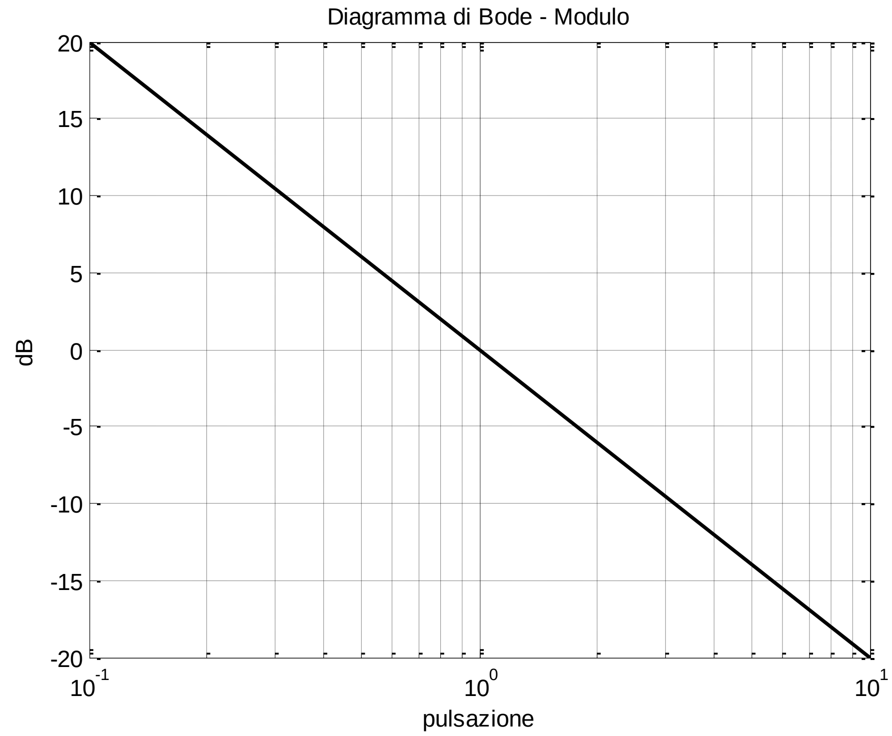
L'ampiezza della sinusoide in uscita in condizioni stazionarie in risposta all'ingresso $u(t) = sin\,(\omega t)$ *risulta essere pari a* $|G(j\omega)|$, *dove* $|G(j10)| = 0dB = 1.$

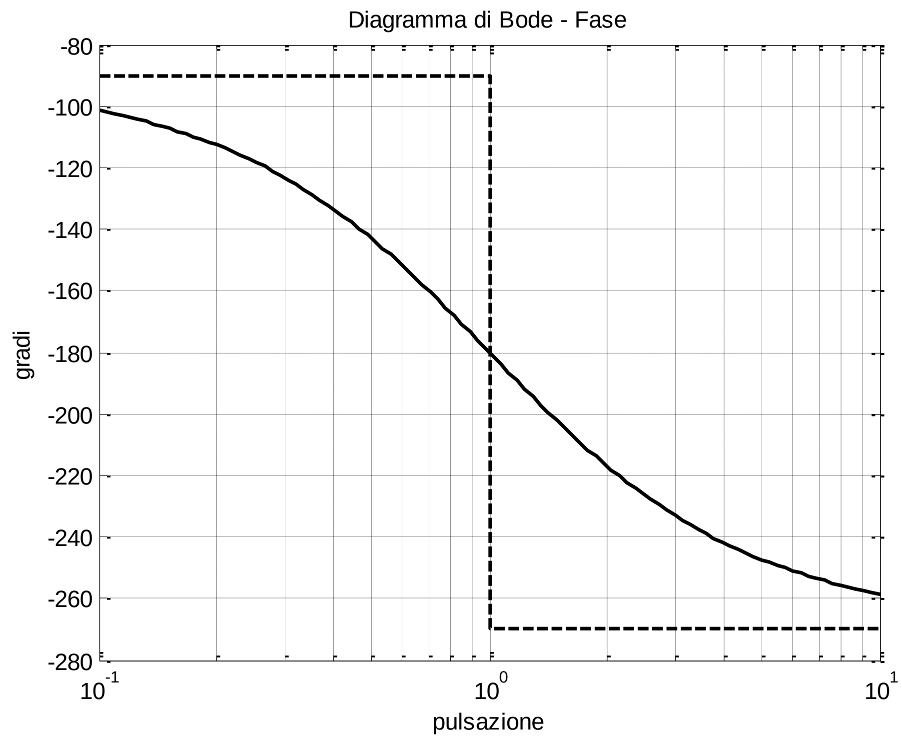
B. Si consideri ora il seguente sistema (ad anello chiuso), dove la funzione di trasferimento $G(s)$ corrisponde con quella studiata al punto A:



B.1 Si studino le proprietà di stabilità del <u>sistema retroazionato</u> al variare del guadagno μ.

I diagrammi di Bode di L(s)(per μ=1) sono mostrati nella figura seguente.





Le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono verificate per ogni valore non nullo di μ. Infatti

- *L(s) non presenta poli a parte reale positiva.*
- *Il diagramma del modulo di L(s) attraversa una sola volta, dall'alto in basso, l'asse a 0 dB.*
- *L(s) è strettamente propria.*

Il sistema risulta essere asintoticamente stabile se e solo se:

- *Il guadagno di L(s) è μ>0*
- *Il margine di fase di L(s) è φ_m>0 e cioè la fase critica* $0 > \varphi_c$*>-180. Questo si verifica (osservando i grafici) se* $\mu < 1$.

B.2 Si ponga $\mu = 0.1$. Si scriva la funzione di trasferimento approssimata tra il segnale $y^o(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Ponendo $\mu = 0.1$*, si ottiene che la pulsazione critica è pari a* $\omega_c = 0.1$ *rad/s, in corrispondenza della quale (si vedano i diagrammi di Bode) la fase critica risulta circa -100° . Un calcolo più preciso è il seguente:*

$$\varphi_c = \measuredangle L(j\omega_c) = -90° + \measuredangle(1 - j0.1) - \measuredangle(1 + j0.1) = -90° - 2\,\mathrm{atan}(0.1) = -101.4°$$

Si calcola quindi che $\varphi_m = 180 - |\varphi_c| \cong 78.6°$*. Dato che Dato che* φ_m *>75° la funzione di trasferimento che approssima la funzione di sensitività complementare cercata risulta:*

$$F_{appr}(s) = \frac{\mu_F}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$$

dove, dato che il tipo di L(s) è g=1, il guadagno della f. di sensitività complementare risulta $\mu_F = 1$.

B.3 In base alla risposta data alla domanda A.2, si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino $y^o(t) = sca(t)$.

In base alla risposta al punto A.2., si ottiene che

- *Il tempo di assestamento è pari a* $T_{a1} \cong 4.6\tau$ *unità di tempo, dove* $\tau = \frac{1}{\omega_c} = 10$ *unità di tempo.*
- *Dato che non sono presenti poli complessi coniugati, la sovraelongazione percentuale è nulla, e la risposta non presenta oscillazioni.*
- *Il guadagno è* $\mu = 1$.

B.4 Si determini l'ampiezza della sinusoide in uscita di regime in risposta all'ingresso e $y^o(t) = \sin(10\,t)$.

Dato che la pulsazione $\omega = 10$ *rad/s della sinusoide in ingresso è maggiore di* $\omega_c = 0.1$ *rad/s, si ottiene che (ricordando che μ=0.1),* $|F(j10)| \cong |L(j10)| \cong -40dB = 0.01$*. L'ampiezza della sinusoide in uscita in condizioni stazionarie in risposta all'ingresso* $y^o(t) = \sin(10\,t)$ *risulta quindi essere pari a* $|F(j10)| = 0.01$.