INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME

Prima prova *in itinere* – 07 maggio 2014

Anno Accademico 2013/2014

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema S descritto dalla seguente equazione

$$\dot{x}(t) = x(t)^3 - x(t) + u(t)$$

1.1. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$.

Si definiscano le variabili $\delta x = x - \bar{x}$ e $\delta u = u - \bar{u}$. Il sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ risulta:

$$\dot{\delta x} = A(\bar{x}, \bar{u})\delta x + B(\bar{x}, \bar{u})\delta u$$

dove $A(\bar{x}, \bar{u}) = 3\bar{x}^2 - 1$ e $B(\bar{x}, \bar{u}) = 1$.

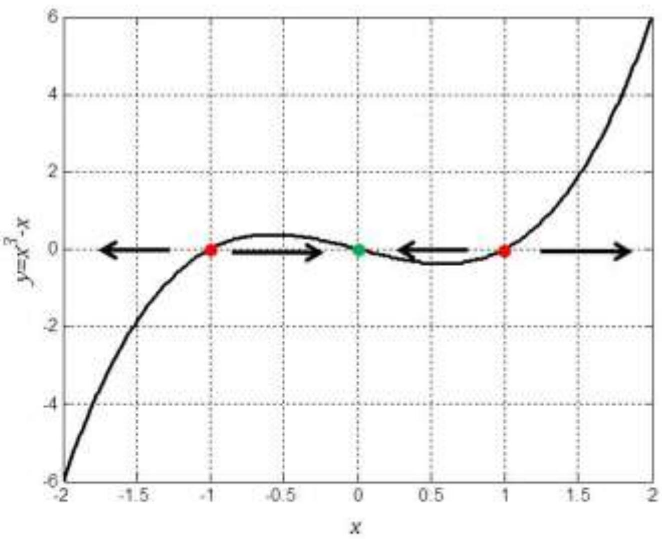
1.2. Determinare le condizioni di equilibrio associate all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 0 \ \forall t$.

Le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$ sono:

- $(\bar{x}, \bar{u}) = (0,0)$
- $(\bar{x}, \bar{u}) = (1,0)$
- $(\bar{x}, \bar{u}) = (-1,0)$

1.3. Valutare le proprietà di stabilità dell'equilibrio/degli equilibri trovati al punto precedente utilizzando un metodo a scelta (metodo grafico o linearizzazione) .

Per svolgere tale analisi è conveniente ricorrere al metodo grafico. Si disegna il grafico relativo a $y = x(t)^3 - x(t)$ dove si evidenziano i punti di passaggio per l'asse y=0 (equilibri) e il segno della funzione $x(t)^3 - x(t)$ in corrispondenza dei valori di x:



E' possibile, dal grafico in figura, concludere che i punti di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u}) = (1,0)$ e $(\bar{x}, \bar{u}) = (-1,0)$ sono instabili, mentre il punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u}) = (0,0)$ è asintoticamente stabile.

1.4. Si ponga

$$u(t) = k(x(t)^2 - 1)$$

dove k è un parametro reale. Si scriva l'equazione dinamica del sistema così ottenuto e si determinino i valori del parametro k affinchè la condizione di equilibrio $\bar{x} = 1$ sia asintoticamente stabile.

Applicando la legge $u(t) = k(x(t)^2 - 1)$ *al sistema, si ottiene che:*

$$\dot{x}(t) = x(t)^3 - x(t) + k(x(t)^2 - 1) = (x(t) + k)(x(t)^2 - 1)$$

Prima di tutto si noti che il punto $\bar{x} = 1$ *corrisponde effettivamente ad un punto di equilibrio per il sistema. Si definisca* $\delta x = x - \bar{x}$. *Il sistema (ora autonomo, ossia dove non compare più la dipendenza da una variabile esogena u(t)) linearizzato attorno a un generico punto di equilibrio* $\bar{x}$ *risulta:*

$$\dot{\delta x} = A(\bar{x})\delta x$$

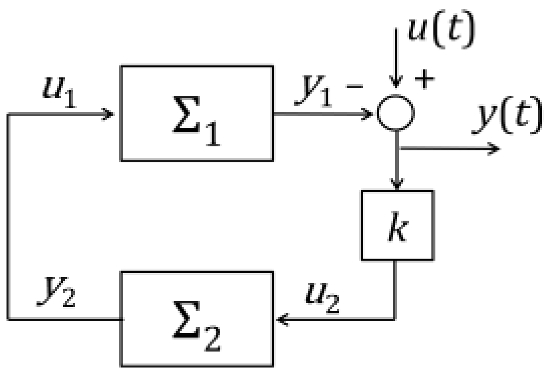
dove $A(\bar{x}) = \bar{x}^2 - 1 + 2\bar{x}(\bar{x} + k)$. *In particolare* $A(1) = 2(k+1)$. *Se k<-1, risulta che* $A(1) < 0$, *e dunque che l'equilibrio* $\bar{x} = 1$ *è asintoticamente stabile.*

ESERCIZIO 2

Si consideri i sistemi Σ_1 e Σ_2 , descritti dalle seguenti equazioni:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - u_1(t) \\ y_1(t) &= x_1(t) + u_1(t) \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u_2(t) \\ y_2(t) &= 2x_2(t) \end{cases}$$

2.1. Considerando lo schema retroazionato illustrato nella figura seguente



si scrivano le equazioni del sistema avente come ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

La soluzione al problema si ottiene osservando che, nello schema:

- $u_1(t) = y_2(t) = 2x_2(t)$
- $u_2(t) = k\big(u(t) - y_1(t)\big) = k\big(u(t) - x_1(t) - u_1(t)\big) = k\big(u(t) - x_1(t) - 2x_2(t)\big)$

Si ricava quindi che

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & -x_1(t) - 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = & -x_2(t) + k\big(u(t) - x_1(t) - 2x_2(t)\big) = -kx_1(t) - (2k+1)x_2(t) + ku(t) \\ y(t) = & -x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

2.2.. Si indichi, giustificando brevemente le risposte, se il sistema complessivo

a) è dinamico. *Il sistema è dinamico.*
b) è lineare. *Il sistema è lineare.*

c) è strettamente proprio. *Il sistema è proprio non strettamente.*
d) è tempo-variante. *Il sistema è tempo-invariante.*
e) ha ordine 2. *Il sistema ha ordine 2.*
f) è SISO. *Sì. Presenta una sola variabile di ingresso e una sola variabile di uscita.*

2.3. Si valutino le proprietà di stabilità del sistema complessivo al variare dei valori assunti dal parametro reale k.

Il polinomio caratteristico della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -k & -(2k+1) \end{bmatrix}$$

risulta $p(\lambda) = \lambda^2 + 2(\lambda + 1) + 1$. *Si ottiene quindi che:*

- *se k<-1 il sistema risulta instabile;*
- *se k=-1 il sistema risulta stabile semplicemente (autovalori immaginari in* $\pm j$*);*
- *se k>-1 il sistema risulta asintoticamente stabile.*

2.4. Si calcoli il movimento libero dell'uscita *y*(*t*) , ottenuto con la seguente condizione iniziale

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

nei seguenti casi:

a. *k*=0;
b. *k*=-1.

<u>Caso a</u>

Se k=0 *si ha:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice di sistema A presenta un autovalore ($\lambda = -1$) *con molteplicità algebrica pari a 2. E' facile verificare che tale auto valore ha molteplicità geometrica pari a 1. Pertanto il sistema presenta due modi:* e^{-t}, te^{-t}. *Risulta quindi:*

$$y(t) = \gamma_1 e^{-t} + \gamma_2 te^{-t}$$

da cui si ricava

- $y(0) = \gamma_1$
- $\dot{y}(t) = -\gamma_1 e^{-t} - \gamma_2 te^{-t} + \gamma_2 e^{-t}, \dot{y}(0) = -\gamma_1 + \gamma_2$

Da $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *si ricava che*

- $y(0) = Cx(0) = -2$
- $\dot{y}(0) = CAx(0) = 4$

Si ottiene quindi che $\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 2$, da cui $y(t) = -2e^{-t} + 2te^{-t}$.

<u>Caso b</u>

Se k=-1 *si ha:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice di sistema A presenta due autovalori immaginari in $\pm j$. *Pertanto il sistema presenta due modi:* e^{jt}, e^{-jt}. *Risulta quindi:*

$$y(t) = \gamma_1 e^{jt} + \gamma_2 e^{-jt}$$

da cui si ricava

- $y(0) = \gamma_1 + \gamma_2$
- $\dot{y}(t) = j\gamma_1 e^{jt} - j\gamma_2 e^{-jt}, \dot{y}(0) = j\gamma_1 - j\gamma_2$

Da $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *si ricava che*

- $y(0) = Cx(0) = -2$
- $\dot{y}(0) = CAx(0) = 0$

Si ottiene quindi che $\gamma_1 = \gamma_2 = -1$, da cui $y(t) = -\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) = -2\cos(t)$.

ESERCIZIO 3

Si consideri la seguente funzione di trasferimento, relativa ad un sistema di ordine 4:

$$G(s) = \frac{s^2}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 3s + 1}$$

3.1. Si risponda alle seguenti domande, relative a $G(s)$:

a. E' strettamente propria? *Sì.*
b. Qual è il grado relativo? *Il grado relativo è 4-2=2.*
c. Qual è il tipo g? *g=-2. Infatti esistono due zeri nell'origine.*
d. Qual è il valore del guadagno generalizzato μ? $\mu = 1$.
e. Qual è il valore della costante di trasferimento ρ? $\rho = 1$.

3.2. Verificare la asintotica stabilità del sistema attraverso il metodo di Routh-Hurwitz.

La tabella di Routh per il sistema è

1	*4*	*1*
2	*3*	*0*
5/2	*1*	*0*
11/5	*0*	
1		

Si noti che la tabella è ben definita e che i segni degli elementi della prima colonna risultano concordi. Pertanto i poli di G(s) (che corrispondono con gli auto valori del sistema del 4o ordine) hanno parte reale negativa. Perciò risulta che il sistema è asintoticamente stabile.

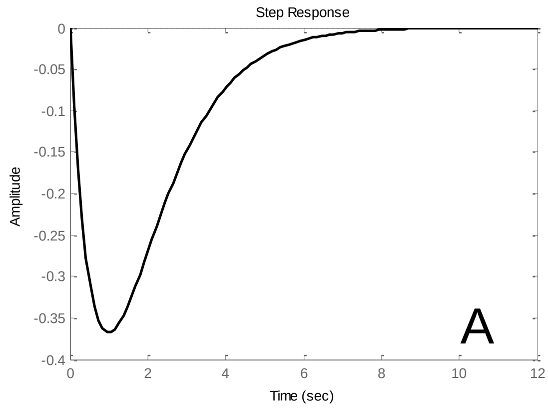
3.3. Si consideri la risposta allo scalino $u(t)$=sca(t), la cui trasformata di Laplace è chiamata $Y(s)$. Sono verificate le ipotesi di applicabilità dei teoremi del valore finale e del valore iniziale? Si giustifichi la risposta.

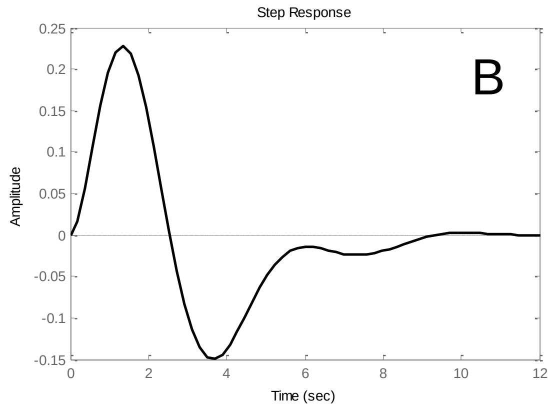
Dato che $U(s)=\mathcal{L}(u(t))=\frac{1}{s}$*, si calcola*

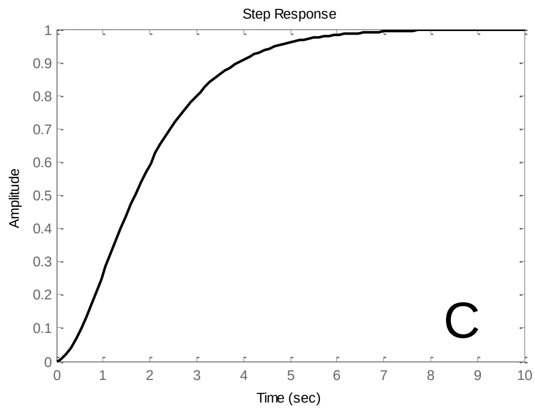
$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{s}{s^4+2s^3+4s^2+3s+1}$$

Entrambi i teoremi sono applicabili, in quanto Y(s) ha grado relativo maggiore di zero e non presenta poli con parte reale positiva.

3.4. In base all'opportuna applicazione dei teoremi del valore iniziale e del valore finale (e delle proprietà della trasformata di Laplace), si indichi (giustificando in modo adeguato la risposta) quale delle seguenti figure illustra la risposta allo scalino $u(t)$=sca(t).







Si calcola che

- $y(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s^2}{s^4+2s^3+4s^2+3s+1}=0$
- $y(0)=\lim_{s\to +\infty}\frac{s^2}{s^4+2s^3+4s^2+3s+1}=0$
- $\mathcal{L}(\dot{y}(t))=sY(s)-y(0)=G(s),\ \dot{y}(0)=\lim_{s\to +\infty} sG(s)=0$
- $\mathcal{L}(\ddot{y}(t))=s\mathcal{L}(\dot{y}(t))-\dot{y}(0)=sG(s),\ \ddot{y}(0)=\lim_{s\to +\infty} s^2G(s)=1>0$

L'unica traiettoria compatibile con i valori calcolati precedentemente è la B.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema seguente

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & -5x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -4x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ y(t) & = & x_2(t) \end{cases}$$

4.1. Si scriva la funzione di trasferimento del sistema.

Le matrici di sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = 0$$

da cui si ottiene

$$G(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)}$$

4.2. Si determinino le proprietà di stabilità del sistema.

Gli autovalori di A (corrispondenti ai poli di G(s)) sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$. Il sistema risulta pertanto asintoticamente stabile.

4.3. Si scriva l'espressione analitica della risposta forzata del sistema a fronte dei segnali di ingresso:

a. $u(t) = e^{-5t}$
b. $u(t) = e^{-5t} + e^{-t}$
c. $u(t) = e^{-t}$

<u>Caso a.</u>

Nel caso in cui $u(t) = e^{-5t}$, si ottiene che U(s)=1/(s+5), da cui

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+3}$$

Applicando il metodo dei residui si ottiene $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Si calcola quindi l'antitrasformata di Y(s) come

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right) \mathrm{sca}(t)$$

<u>Caso b.</u>

Si calcola che

$$U(s) = \frac{1}{s+5} + \frac{1}{s+1} = \frac{2(s+3)}{(s+5)(s+1)}$$

da cui

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$$

Si calcola quindi

$$y(t) = 2te^{-t}\text{sca}(t)$$

<u>Caso c.</u>

La soluzione in questo caso può essere ottenuta applicando il principio di sovrappositione degli effetti e osservando la soluzione nei casi a e b. Si ottiene dunque:

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2}e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)\text{sca}(t)$$