INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

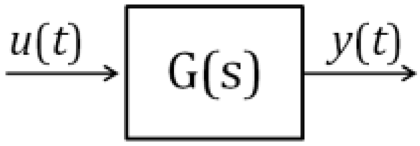
TEMA D'ESAME

II prova in itinere – 04 luglio 2014

Anno Accademico 2013/2014

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema seguente



Si ponga $u(t)$=sca(t). Si stabilisca la corretta associazione tra il movimento forzato di $y(t)$ (grafici 1-4) e i diagrammi di Bode di G(s) (grafici A-D). Si giustifichino adeguatamente e in modo esaustivo le risposte date.

Si conduce l'analisi partendo dallo studio dei diagrammi di Bode.

A. Dai diagrammi di Bode possiamo derivare le seguenti proprietà relative alla funzione di trasferimento corrispondente:

- *g=0, dato che il tratto iniziale del diagramma del modulo è un tratto di retta di pendenza nulla.*
- $\mu = 1$, *dato che il tratto iniziale del diagramma del modulo ha valore* $|\mu|_{dB} = 0$, *cioè* $|\mu| = 1$. *Dal tratto iniziale del diagramma della fase si conclude che il segno di μ è positivo.*
- *Non ci sono zeri.*
- *Esistono due singolarità alla pulsazione* $\omega = 1$ *rad/s. Essi*
    - *sono poli dato che in* $\omega = 1$ *rad/s il diagramma del modulo ha un cambiamento di pendenza negativo (di 2*20 dB/decade);*
    - *presentano parte reale negativa dato che in corrispondenza in* $\omega = 1$ *rad/s la variazione di fase è negativa (e pari a 2*90° in valore assoluto).*
    - *dato che la differenza tra il diagramma reale e quello approssimato in* $\omega = 1$ *rad/s è circa 0dB (quindi diversa da 2*3dB, che si verificherebbe nel caso in cui i poli fossero reali) i poli sono complessi coniugati. Come visto, la corrispondente pulsazione naturale è* $\omega_n = \omega = 1$ *rad/s. Per quantificare lo smorzamento di tali poli, si ricordi che la differenza tra il diagramma reale e quello approssimato in* ω_n *è* $|1/(2\xi)|_{dB} = 0$, da cui risulta $1/(2\xi)=1$, cioè (circa) $\xi = 0.5$.

La risposta allo scalino di ampiezza unitaria di un sistema del II ordine con due poli complessi coniugati con guadagno unitario, $\omega_n = \omega = 1$ *rad/s, e smorzamento* $\xi = 0.5$

- *converge al valore asintotico di* $y_\infty = 1$;
- *presenta oscillazioni smorzate di periodo* $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 8.4$ *s;*
- *presenta sovraelongazione percentuale* $S\% = 100e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 16\%$;
- *presenta un tempo di assestamento* $T_{ass} \cong 5\tau$ *dove* $\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = 2$ *s.*

Una siffatta risposta corrisponde con la risposta mostrata nel grafico 4.

B. Dai diagrammi di Bode possiamo derivare le seguenti proprietà relative alla funzione di trasferimento corrispondente:

- *g=0, dato che il tratto iniziale del diagramma del modulo è un tratto di retta di pendenza nulla.*

- *$\mu = 1$, dato che il tratto iniziale del diagramma del modulo ha valore $|\mu|_{dB} = 0$, cioè $|\mu| = 1$. Dal tratto iniziale del diagramma della fase si conclude che il segno di μ è positivo.*
- *C'è una singolarità in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$ rad/s. Essa*
  - *è uno zero dato che in $\omega = 0.1$ rad/s il diagramma del modulo ha un cambiamento di pendenza positivo (di 20 dB/decade);*
  - *presenta parte reale negativa (costante di tempo positiva) dato che in corrispondenza in $\omega = 0.1$ rad/s la variazione di fase è positiva (e pari a 90°).*
- *Esistono due singolarità, rispettivamente alle pulsazioni $\omega = 1$ rad/s $\omega = 20$ rad/s. Essi*
  - *sono poli dato che alle date pulsazioni il diagramma del modulo ha un cambiamento di pendenza negativo (di 20 dB/decade);*
  - *presentano parte reale negativa (costante di tempo positiva) dato che alle date pulsazioni la variazione di fase è negativa in ambo i casi (e pari a 90° in valore assoluto in ambo i casi).*

La risposta allo scalino di ampiezza unitaria di un sistema del II ordine con due poli reali, uno zero (in s=-0.1) posizionato tra il polo dominante (in s=-1) e l'asse immaginario, e con guadagno unitario

- *converge al valore asintotico di $y_\infty = 1$;*
- *presenta sovraelongazioni;*
- *non presenta oscillazioni.*

Una siffatta risposta corrisponde con la risposta mostrata nel grafico 2.

C. Dai diagrammi di Bode possiamo derivare le seguenti proprietà relative alla funzione di trasferimento corrispondente:

- *g=0, dato che il tratto iniziale del diagramma del modulo è un tratto di retta di pendenza nulla.*
- *$\mu = 1$, dato che il tratto iniziale del diagramma del modulo ha valore $|\mu|_{dB} = 0$, cioè $|\mu| = 1$. Dal tratto iniziale del diagramma della fase si conclude che il segno di μ è positivo.*
- *Non ci sono zeri.*
- *Esistono due singolarità alla pulsazione $\omega = 1$ rad/s. Essi*
  - *sono poli dato che in $\omega = 1$ rad/s il diagramma del modulo ha un cambiamento di pendenza negativo (di 2*20 dB/decade);*
  - *presentano parte reale negativa dato che in corrispondenza in $\omega = 1$ rad/s la variazione di fase è negativa (e pari a 2*90° in valore assoluto).*
  - *dato che la differenza tra il diagramma reale e quello approssimato in $\omega = 1$ rad/s è circa 20dB e positiva, i poli sono complessi coniugati. Come visto, la corrispondente pulsazione naturale è $\omega_n = \omega = 1$ rad/s. Per quantificare lo smorzamento di tali poli, si ricordi che la differenza tra il diagramma reale e quello approssimato in ω_n è* $|1/(2\xi)|_{dB} = 20$, da cui risulta $1/(2\xi)$=10, cioè (circa) $\xi = 0.05$.

La risposta allo scalino di ampiezza unitaria di un sistema del II ordine con due poli complessi coniugati con guadagno unitario, $\omega_n = \omega = 1$ rad/s, e smorzamento $\xi = 0.05$

- *converge al valore asintotico di $y_\infty = 1$;*
- *presenta oscillazioni smorzate di periodo $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 6.3$ s;*
- *presenta sovraelongazione percentuale $S\% = 100e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 85\%$;*
- *presenta un tempo di assestamento $T_{ass} \cong 5\tau$ dove $\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = 10$ s.*

Una siffatta risposta corrisponde con la risposta mostrata nel grafico 3.

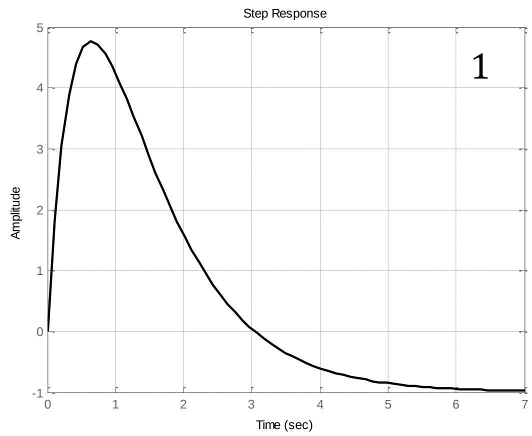
D. Dai diagrammi di Bode possiamo derivare le seguenti proprietà relative alla funzione di trasferimento corrispondente:

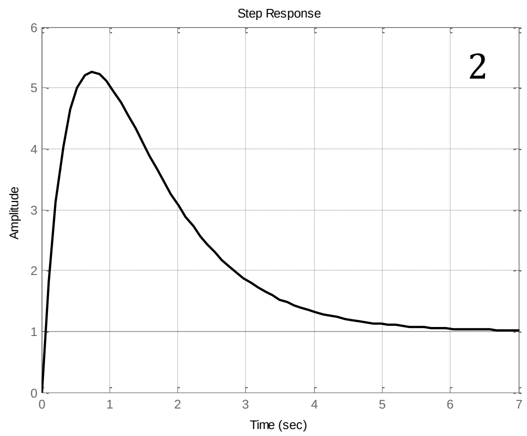
- *g=0, dato che il tratto iniziale del diagramma del modulo è un tratto di retta di pendenza nulla.*
- $\mu = -1$*, dato che il tratto iniziale del diagramma del modulo ha valore* $|\mu|_{dB} = 0$*, cioè* $|\mu| = 1$*. Dal tratto iniziale del diagramma della fase si conclude che il segno di* μ *è negativo.*
- *C'è una singolarità in corrispondenza della pulsazione* $\omega = 0.1$ *rad/s. Essa*
  - *è uno zero dato che in* $\omega = 0.1$ *rad/s il diagramma del modulo ha un cambiamento di pendenza positivo (di 20 dB/decade);*
  - *presenta parte reale POSITIVA (costante di tempo NEGATIVA) dato che in corrispondenza in* $\omega = 0.1$ *rad/s la variazione di fase è negativa (e pari a 90°).*
- *Esistono due singolarità, rispettivamente alle pulsazioni* $\omega = 1$ *rad/s* $\omega = 20$ *rad/s. Essi*
  - *sono poli dato che alle date pulsazioni il diagramma del modulo ha un cambiamento di pendenza negativo (di 20 dB/decade);*
  - *presentano parte reale negativa (costante di tempo positiva) dato che alle date pulsazioni la variazione di fase è negativa in ambo i casi (e pari a 90° in valore assoluto in ambo i casi).*

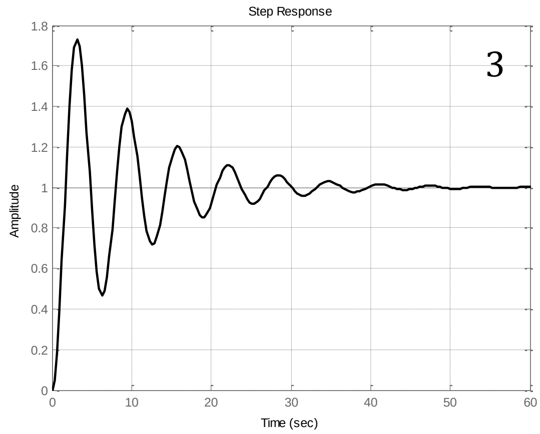
La risposta allo scalino di ampiezza unitaria di un sistema del II ordine con due poli reali, uno zero (in s=0.1), e con guadagno $\mu = -1$

- *converge al valore asintotico di* $y_\infty = -1$*;*
- *presenta una risposta inversa (il tratto iniziale della risposta allo scalino ha derivata con segno opposto rispetto al guadagno, quindi positivo).*
- *non presenta oscillazioni.*

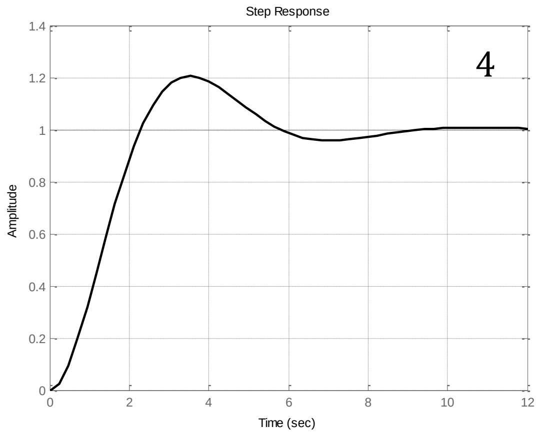
Una siffatta risposta corrisponde con la risposta mostrata nel grafico 1.



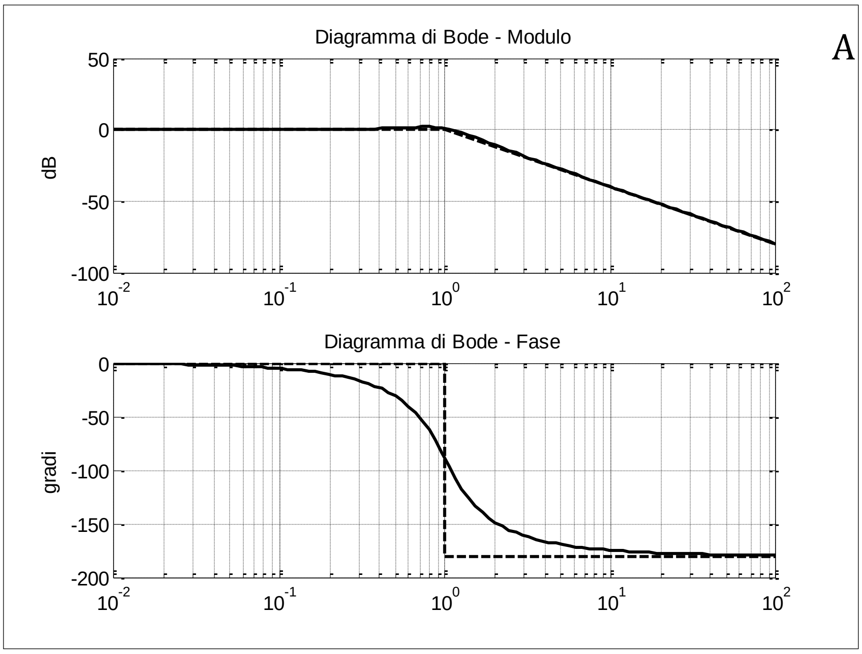




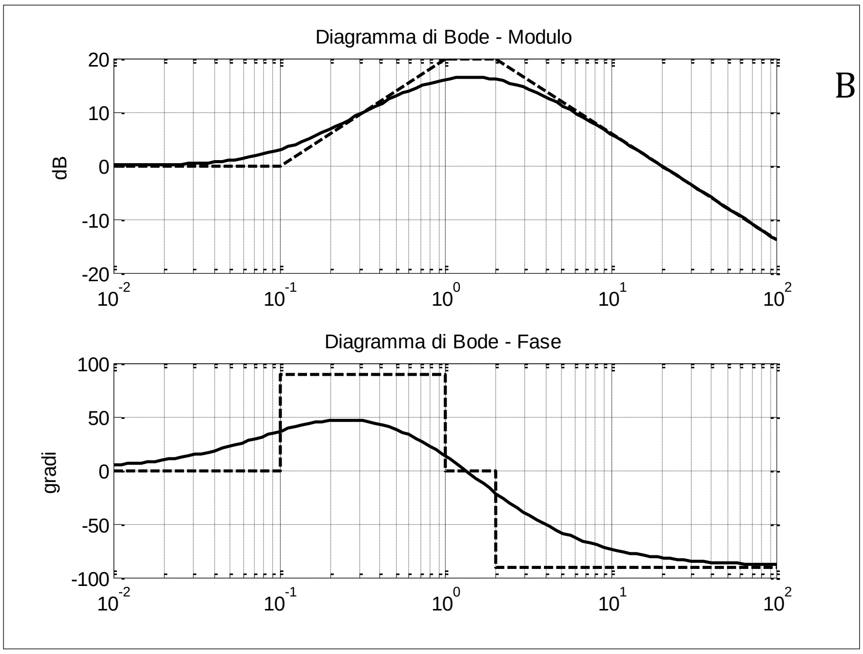
Step Response
3
Amplitude
Time (sec)



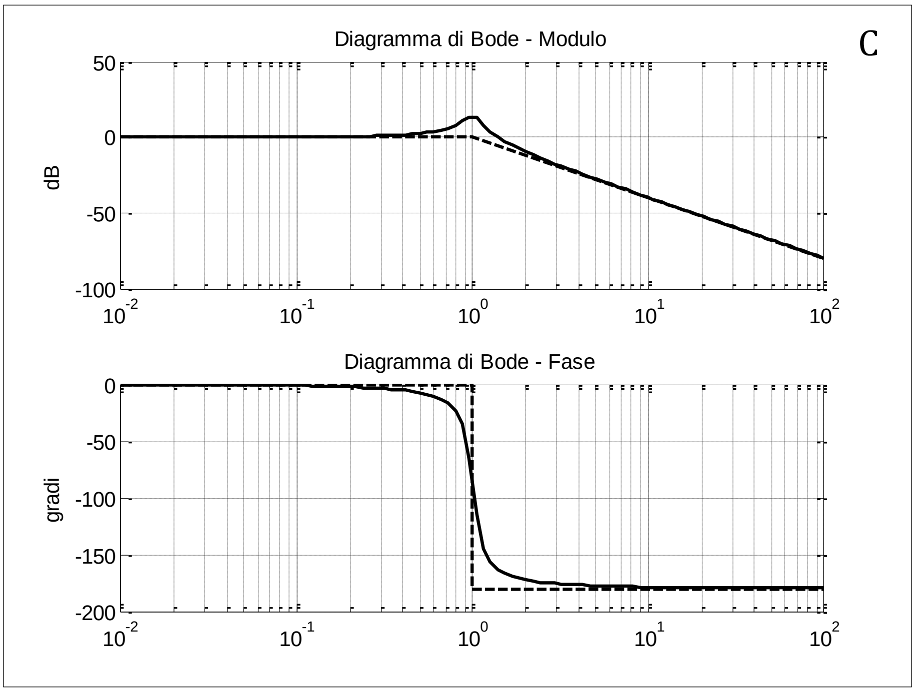
Step Response
4
Amplitude
Time (sec)



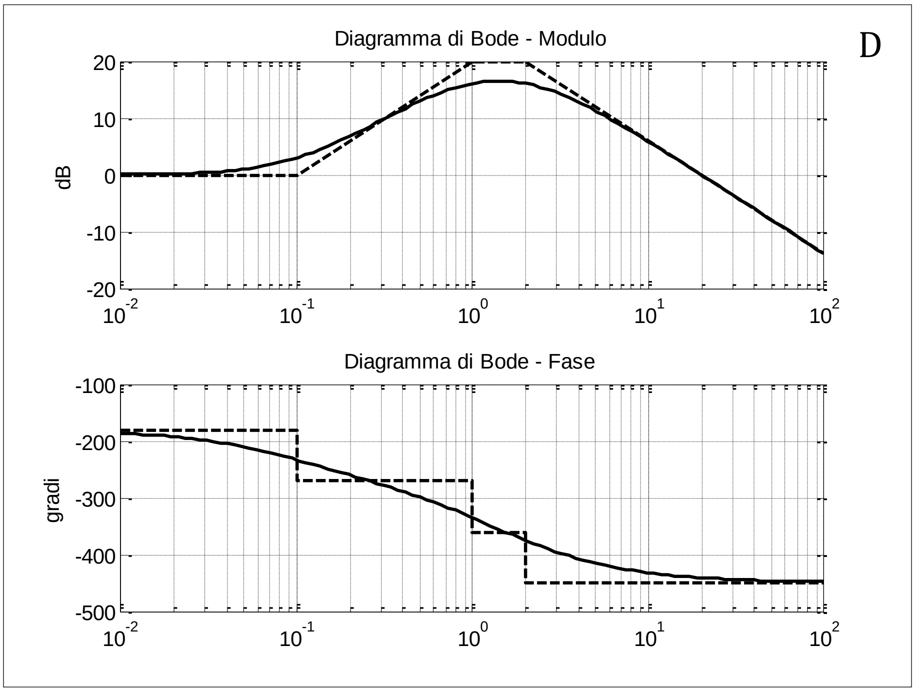
A
Diagramma di Bode - Modulo
dB
Diagramma di Bode - Fase
gradi



B
Diagramma di Bode - Modulo
dB
Diagramma di Bode - Fase
gradi



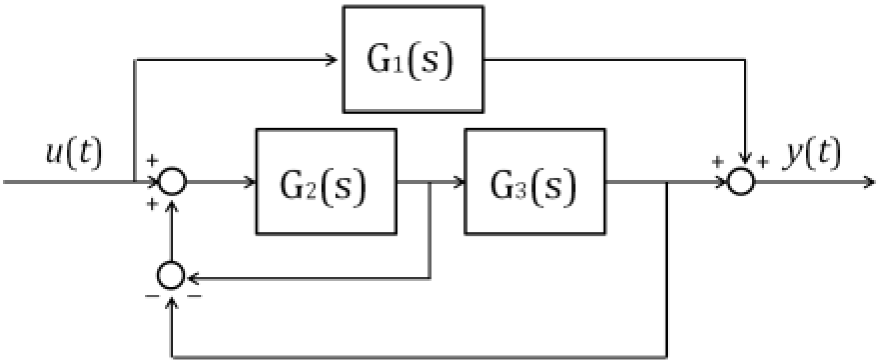
C
Diagramma di Bode - Modulo
dB
50
0
-50
-100
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Diagramma di Bode - Fase
gradi
0
-50
-100
-150
-200
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}



D
Diagramma di Bode - Modulo
dB
20
10
0
-10
-20
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Diagramma di Bode - Fase
gradi
-100
-200
-300
-400
-500
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

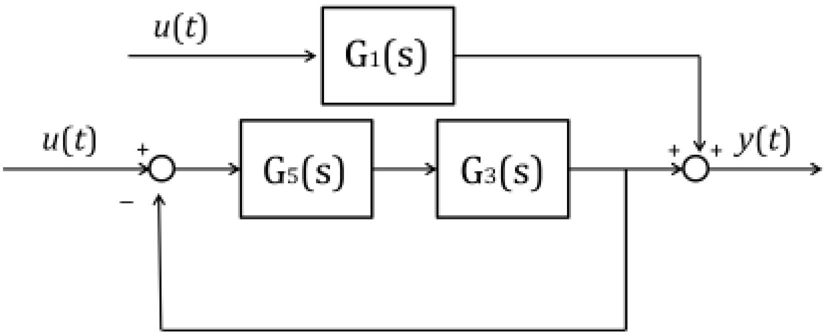
ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente schema a blocchi:



A. Trovare la funzione di trasferimento $G_{tot}(s)$ equivalente tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.

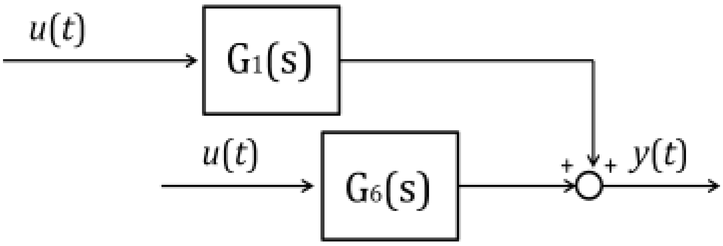
In primo luogo si noti che la funzione di trasferimento $G_1(s)$ *si trova in parallelo rispetto al resto dello schema. Inoltre, risolvendo l'anello interno a retroazione negativa (che coinvolge* $G_2(s)$*) si ottiene che il precedente schema è equivalente al seguente*



dove

$$G_5(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)}$$

Si noti quindi che $G_5(s)$ *e* $G_3(s)$ *sono in serie tra loro e che, risolvendo l'anello "esterno" di retroazione negativa si ottiene il seguente schema:*



dove

$$G_6(s) = \frac{G_5(s)G_3(s)}{1 + G_5(s)G_3(s)}$$

La funzione $G_{tot}(s)$ cercata si ricava infine come $G_{tot}(s) = G_1(s) + G_6(s)$.

B. Esiste nello schema a blocchi in figura una (o più) funzione di trasferimento la cui asintotica stabilità è necessaria per garantire la asintotica stabilità dell'intero sistema?

Sì, dato che $G_1(s)$ si trova in parallelo rispetto al resto del sistema, la sua asintotica stabilità risulta necessaria per garantire l'asintotica stabilità dell'intero schema.

C. Si ponga:

$$G_1(s) = \frac{\alpha}{s+1},\ G_2(s) = \frac{1}{s}, G_3(s) = \beta$$

C.1 Si calcoli l'espressione di $G_{tot}(s)$.

Si calcola che

$$G_{tot}(s) = \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\beta}{s+1+\beta}$$

C.2. Si discutano le proprietà di stabilità del sistema complessivo al variare dei parametri reali α e β.

L'asintotica stabilità del sistema complessivo si verifica verificando che i poli del sistema complessivo (s=-1 e s=-1-β) abbiano parte reale strettamente negativa. Si verifica quindi che:

- *Se $\beta > -1$ il sistema risulta asintoticamente stabile;*
- *Se $\beta = -1$ il sistema risulta semplicemente stabile;*
- *Se $\beta < -1$ il sistema risulta instabile.*

C.2. Si discuta come varia il guadagno del sistema al variare dei parametri reali α e β.

- *Se $\beta \neq -1, \mu = G(0) = \alpha + \frac{\beta}{1+\beta}$*
- *Se $\beta = -1$,*

$$G_{tot}(s) = \frac{\alpha}{s+1} - \frac{1}{s} = -\frac{1-(\alpha-1)s}{s(s+1)}$$

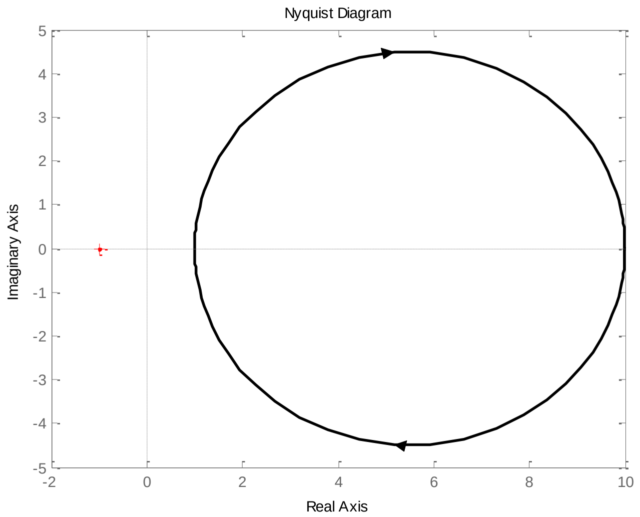
In questo caso il guadagno (generalizzato) risulta essere pari a -1.

ESERCIZIO 3

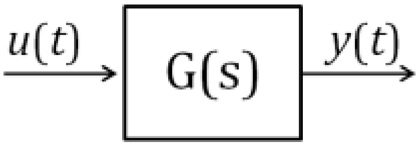
Si consideri la funzione di trasferimento, relativa ad un sistema di ordine 1.

$$G(s) = 10\frac{s+1}{s+10}$$

Per semplicità, il diagramma di Nyquist di $G(s)$ è riportato nella figura seguente:



A. Si risponda (giustificando brevemente ma adeguatamente le risposte) alle seguenti domande relative al sistema ad anello aperto in figura.



a. Il sistema è asintoticamente stabile? *Sì. Dato che il sistema è di ordine 1, presenta un solo autovalore corrispondente con il polo di G(s), cioè* $\lambda = -10$.
b. Il sistema è strettamente proprio? *No, perchè la funzione di trasferimento corrispondente è propria ma non strettamente.*
c. Si ponga $u(t)$=sca(t).

U(s)=1/s, da cui si ottiene

$$Y(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+10)}$$

I teoremi del valore finale e iniziale risultano applicabili, dato che:

- il grado del denominatore di Y(s) è strettamente maggiore del grado del suo numeratore (condizione di applicabilità per t. valore iniziale e t. valore finale);

- Y(s) ha poli con parte reale < 0 *e in s=0 (condizione di applicabilità per t. valore finale).*

- Usando il teorema del valore iniziale (se applicabile) calcolare il valore iniziale della risposta forzata di $y(t)$ all'ingresso dato.

Applicando il t. valore iniziale si ottiene:

$$y(0) = \lim_{s\to+\infty} sY(s) = 10$$

- Usando il teorema del valore finale (se applicabile) calcolare il valore finale della risposta forzata di $y(t)$ all'ingresso dato.

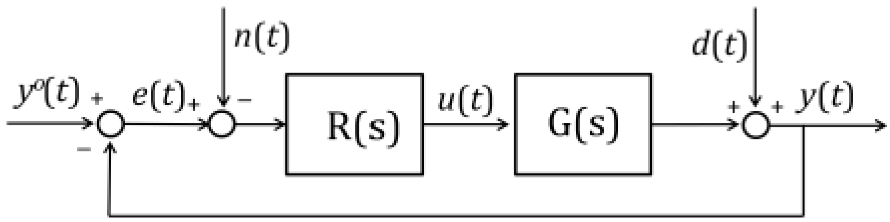
Applicando il t. valore finale si ottiene:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} sY(s) = 1$$

- In quanto tempo la risposta forzata di $y(t)$ si assesta al valore calcolato?

Il polo del sistema corrisponde a s=-10, la cui costante di tempo è $\tau = 0.1$ *unità di tempo. Il tempo di assestamento risulta quindi essere circa pari a* $T_{ass} \cong 5\tau = 0.5$ *unità di tempo.*

B. Si consideri ora il sistema <u>ad anello chiuso</u> nella figura sottostante:



Si valutino i valori di $k \in \mathbb{R}$ che garantiscono l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso per ciascuna delle seguenti funzioni $R(s)$:

a. $R(s) = \frac{k}{s}$
b. $R(s) = \frac{k}{1+s}$
c. $R(s) = k$

Tale analisi deve venire condotta utilizzando il criterio di Bode (verificando di volta in volta le ipotesi di applicabilità sul diagramma reale di $L(s)=R(s)G(s)$) e, laddove questo risulti non applicabile, il criterio di Nyquist.

a. Nel caso R(s)=k/s (suppongo che $k \neq 0$ *per ovvie ragioni),*

$$L(s) = k\frac{(s+1)}{s(1+\frac{s}{10})}$$

Si verifica che il criterio di Bode è applicabile per ogni valore considerato di k. Infatti, L(s) risulta strettamente propria, P=0, e il diagramma del modulo attraversa l'asse a 0 dB una sola volta (dall'alto verso il basso).

- Se k>0, il guadagno di L(s) è k>0, e il margine di fase risulta sempre compreso tra 0° e 90°. Pertanto, il sistema ad anello chiuso risulta essere asintoticamente stabile.

- Se k<0, il guadagno della funzione L(s) risulta negativo. Ne risulta che il sistema ad anello chiuso non è asintoticamente stabile.

b. Nel caso R(s)=k/(1+s) (suppongo che $k \neq 0$ *per ovvie ragioni),*

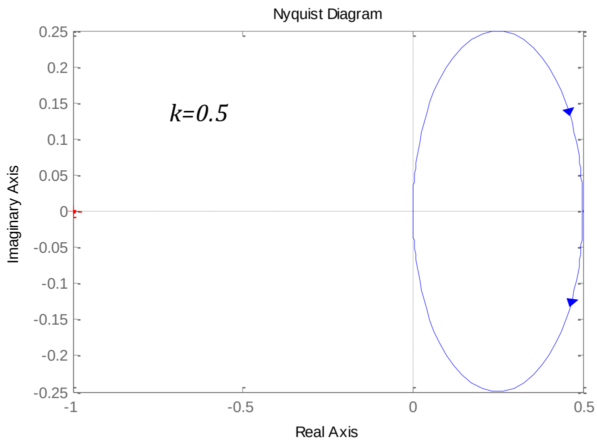
$$L(s) = 10\frac{k}{s+10} = \frac{k}{1+s/10}$$

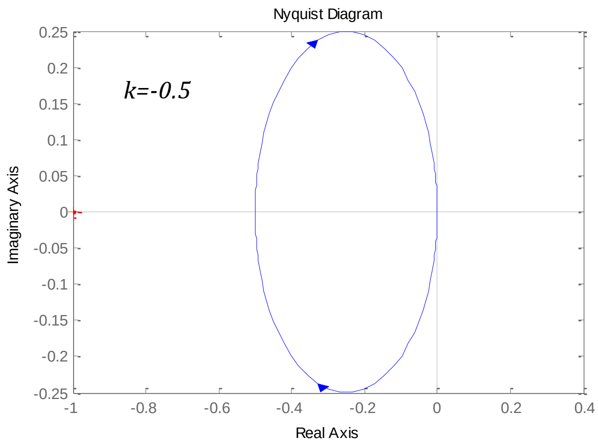
Per $|k| > 1$*, il criterio di Bode è applicabile. Infatti, L(s) risulta strettamente propria, P=0, e il diagramma del modulo attraversa l'asse a 0 dB una sola volta (dall'alto verso il basso). I sottocasi possibili sono*

- Se k>1, il guadagno di L(s) è k>0, e il margine di fase risulta sempre compreso tra 0° e 90°. Pertanto, il sistema ad anello chiuso risulta essere asintoticamente stabile.

- Se k<-1, il guadagno della funzione L(s) risulta negativo. Ne risulta che il sistema ad anello chiuso non è asintoticamente stabile.

Per $|k| < 1$*, il criterio di Bode non è applicabile. Infatti, il corrispondente diagramma del modulo no attraversa l'asse a 0 dB. Dobbiamo ricorrere al criterio di Nyquist. Il corrispondente diagramma di Nyquist è il seguente (per valori positivi e negativi di k, rispettivamente – come esempio prendo k=0.5 e k=-0.5, rispettivamente).*





E' facile dunque concludere che, se $|k| < 1$*, il numero di giro che il diagramma di Nyquist compie intorno al punto -1 è pari a N=0. dato che N=P=0, il sistema retroazionato corrispondente risulta asintoticamente stabile.*

Infine, da ragionamenti analoghi si verifica che

- *per k=1, N=0=P, per cui il sistema retroazionato corrispondente risulta asintoticamente stabile.*
- *per k=-1, il diagramma di Nyquist risulta passa per il punto -1, per cui N non è definito, per cui il sistema retroazionato corrispondente risulta non asintoticamente stabile.*

c. Nel caso R(s)=k risolvo il problema facendo ricorso al teorema di Nyquist. In particolare, osservando il diagramma di Nyquist di G(s) nella figura sovrastante, e ricordando che L(s)=kG(s)

- se k>0 il diagramma di Nyquist di L(s) "si sviluppa" nel semipiano destro. In questo caso il numero di giri attorno al punto -1 sarà sempre nullo, cioè N=P=0. Dal teorema, si ottiene che il sistema ad anello chiuso risulta asintoticamente stabile.

- se -1/10<k<0 risulta che N=0=P → sistema retroazionato asintoticamente stabile

- se $-1 \leq k \leq -1/10$ *risulta che N=-1 o il diagramma passa per il punto -1. In ogni caso il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.*

- se k<-1, N=0=P → sistema retroazionato asintoticamente stabile.

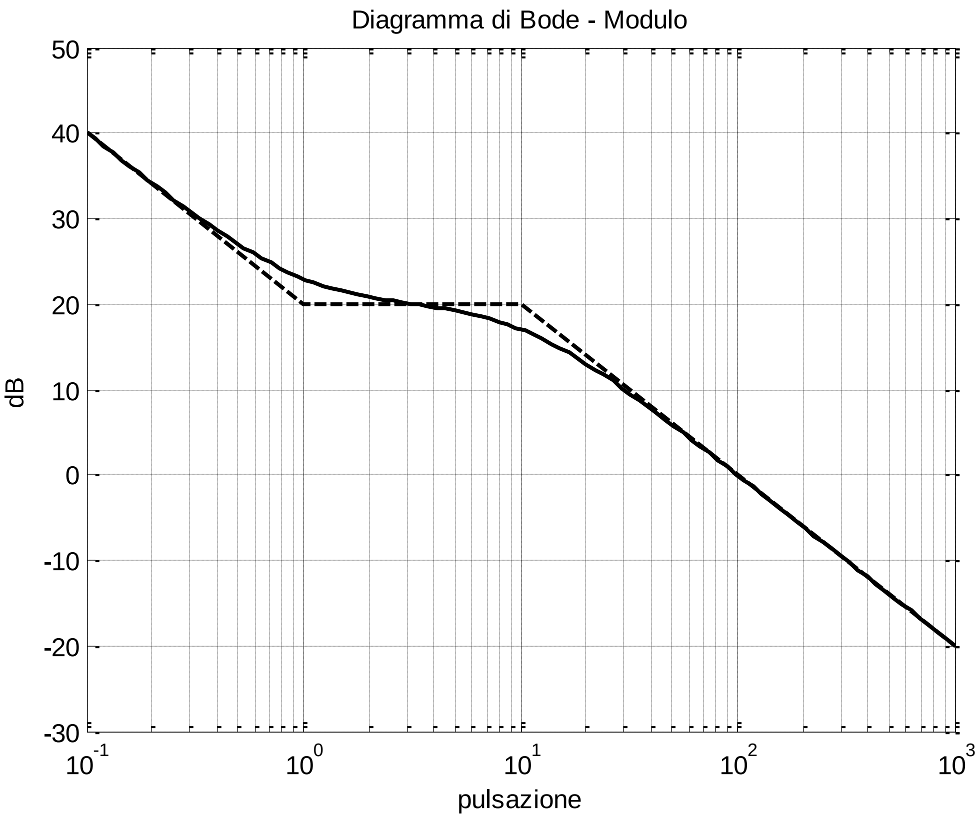
C. Considerando di nuovo il sistema ad anello chiuso mostrato nella figura al punto B. e ponendo $R(s) = \frac{10}{s}$, si risponda alle seguenti domande:

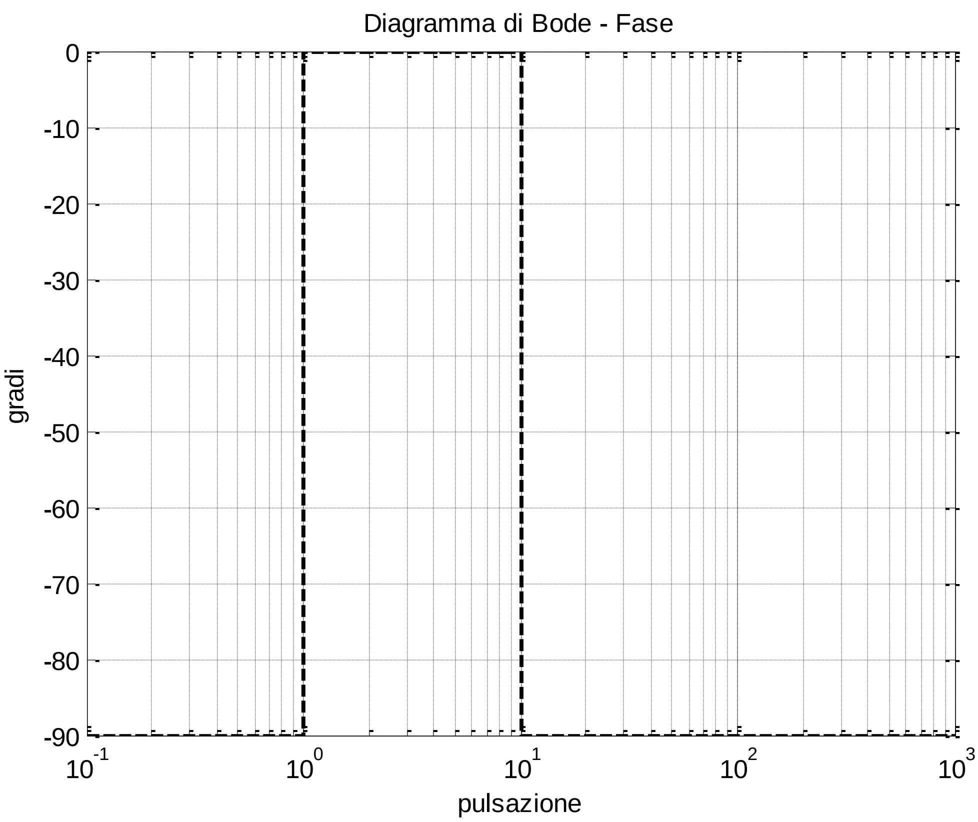
a. Si calcoli in modo approssimato l'espressione della funzione di trasferimento tra la variabile di riferimento $y^o(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Nel caso in esame risulta

$$L(s) = 10\frac{(s+1)}{s(1+\frac{s}{10})}$$

I cui diagrammi di Bode sono i seguenti (per semplicità ho tracciato solo il diagramma asintotico della fase).





Dai diagrammi si ottiene che $\omega_c = 100$ *rad/s e* $\varphi_m > 90° > 75°$. *Grazie a quest'ultima proprietà possiamo approssimare la funzione di sensitività complementare cercata con*

$$F(s) = \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}$$

dove $\mu_F = 1$ *in virtù della presenza del polo nell'origine.*

b. Si supponga che $n(t) = \sin(100t)$. Si determini il valore della ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a transitorio esaurito.

Il valore dell'ampiezza della sinusoide in uscita a transitorio esaurito è $|F(j100)| \cong 1$.

c. Si supponga che $d(t) = \sin(0.01t)$. Si determini il valore della ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a transitorio esaurito.

La funzione di trasferimento tra il disturbo $d(t)$ *e l'uscita* $y(t)$ *è la funzione di sensitività*

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

Per $\omega \ll \omega_c$ *(some in questo caso), è lecito approssimare*

$$|S(j\omega)| \cong \frac{1}{|L(j\omega)|}$$

Dal diagramma di Bode si ottiene che $|L(j0.01)|_{dB} = 60$ *dB, cioè* $|L(j0.01)| = 1000$*, da cui* $|S(j\omega)| \cong 0.001$*, che corrisponde alla ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a transitorio esaurito.*