INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME E SOLUZIONI

Preappello - 04 luglio 2014

Anno Accademico 2013/2014

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = &\quad -x_1(t) + u^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = &\quad x_1^2(t) - 2x_2(t) \\ y = &\quad 3x_2^2(t) \end{aligned}$$

A. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema, motivando brevemente le risposte:

a. è lineare o non lineare? *Il sistema è non lineare.*
b. è statico o dinamico? *Il sistema è dinimico.*
c. è strettamente proprio? *Sì. Il sistema è strettamente proprio.*
d. è MIMO? *No. Il sistema è SISO (single input-single output).*
e. qual è l'ordine del sistema? *L'ordine del sistema è n=2.*

B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.

Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$. *Il sistema linearizzato è il seguente:*

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x_1} \\ \delta\dot{x_2} \end{bmatrix} = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\, \delta u$$

$$\delta y = C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\, \delta u$$

dove

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2\bar{x}_1 & -2 \end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 2\bar{u} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 6\bar{x}_2 \end{bmatrix}, \qquad D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = 0$$

C. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti ai seguenti valori dell'ingresso.

a. $u(t) = \bar{u} = 0.$

Le equazioni del sistema all'equilibrio si ottengono ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ *e u(t)=-1. L'unica condizione di equilibrio ottenuta è* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (0,0,0)$.

b. $u(t) = \bar{u} = 1.$

condizione di equilibrio ottenuta in questo caso è $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (1,1/2,1)$.

D. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati al punto precedente.

La matrice $A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ *presenta autovalori* $\lambda = -1$ *e* $\lambda = -2$ *in ogni condizione operativa. Pertanto entrambi i movimenti di equilibrio trovati al punto precedente sono asintoticamente stabili.*

E. Si calcoli il movimento dell'uscita ottenuto a partire dalla condizione iniziale $\big(x_1(0), x_2(0)\big) = (0,0)$ e l'ingresso *u*(*t*)=sca(*t*) (si noti che il sistema è "triangolare").

Osservando la prima equazione, si osserva che essa è indipendente dalla variabile $x_2(t)$ e presenta nonlinearità solo rispetto alla variabile di ingresso. Nella fattispecie, $u^2(t) = sca(t)$. Applicando l'equazione di Lagrange si ottiene

$$x_1(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} sca(\tau) d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = 1 - e^{-t}$$

Osservando la seconda equazione, si osserva che essa presenta nonlinearità solo rispetto alla variabile $x_1(t)$, che può essere vista come variabile di ingresso per tale sotto-sistema. In particolare, $x_1^2(t) = (1 - e^{-t})^2 = 1 + e^{-2t} - 2e^{-t}$. Applicando l'equazione di Lagrange si ottiene

$$x_2(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} (1 + e^{-2\tau} - 2e^{-\tau}) d\tau = \frac{1}{2} + te^{-2t} + \frac{3}{2} e^{-2t} - 2e^{-t}$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -a & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

A. Si valutino le proprietà di stabilità del sistema al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

Il polinomio caratteristico relativo alla matrice A è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + a$$

- Dato che il polinomio è di grado n=2, condizione necessaria e sufficiente affinchè le sue radici abbiano parte reale strettamente negativa (stabilità asintotica del sistema) è che a>0.

- Se a=0, gli autovalori sono $\lambda = -3$, $\lambda = 0$. Il sistema risulta essere stabile non asintoticamente.

- Se a<0 il sistema risulta instabile.

B. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema.

Si calcola

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s + b}{s^2 + 3s + a}$$

C. Si ponga $a = 2, b = 3$. Si calcoli l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita a fronte dei seguenti segnali:

a. $u(t) = e^{-t}$
b. $u(t) = e^{-3t}$

Ponendo $a = 2, b = 3$ si ottiene

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

a. U(s)=$\frac{1}{s+1}$ *da cui si calcola*

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2}$$

Utilizzando il metodo dei residui si ottiene che

$$\alpha_1 = (s+2)Y(s)|_{s=-2} = 1$$

$$\alpha_3 = (s+1)^2 Y(s)|_{s=-1} = 2$$

Si calcola quindi

$$Y(s) = \frac{\alpha_1(s+1)^2 + \alpha_2(s+1)(s+2) + \alpha_3(s+2)}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{(s+1)^2 + \alpha_2(s+1)(s+2) + 2(s+2)}{(s+1)^2(s+2)}$$
$$= \frac{s^2(1+\alpha_2) + s(2+3\alpha_2+2) + 1 + 2\alpha_2 + 4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$$

Si calcola quindi $\alpha_2 = -1$*. Attraverso l'applicazione della anti trasformata di Laplace si ottiene che*

$$Y(s) = (e^{-2t} - e^{-t} + 2te^{-t})sca(t)$$

D. Nel caso $a = 2, b = 3$ si calcoli l'espressione analitica della risposta libera del sistema a fronte della condizione iniziale $\left(x_1(0), x_2(0)\right) = (0,1)$.

Nel caso in esame gli autovalori sono $\lambda = -2$, $\lambda = -1$*, da cui segue che i modi sono* e^{-2t}, e^{-t}*. Dato che la risposta libera risulta combinazione lineare dei modi propri del sistema risulta*

$$y(t) = \gamma_1 e^{-2t} + \gamma_2 e^{-t}$$

Da cui:

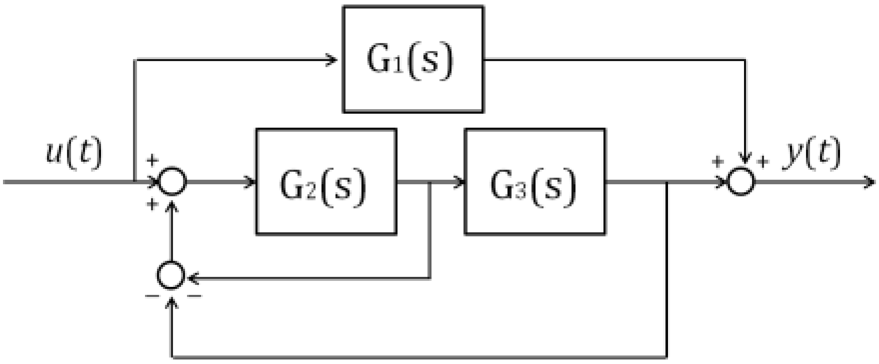
- $y(0) = \gamma_1 + \gamma_2 = Cx(0) = 0$

- $\dot{y}(t) = -2\gamma_1 e^{-2t} - \gamma_2 e^{-t}$, $\dot{y}(0) = -2\gamma_1 - \gamma_2 = CAx(0) = 1$

Risolvendo le equazioni ottenute si ricava $\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$.

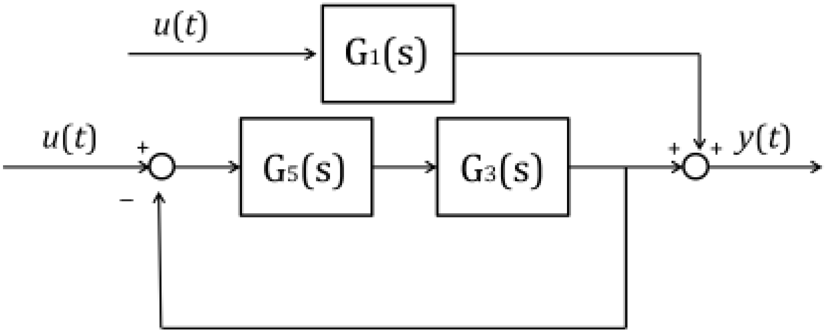
ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente schema a blocchi:



A. Trovare la funzione di trasferimento $G_{tot}(s)$ equivalente tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.

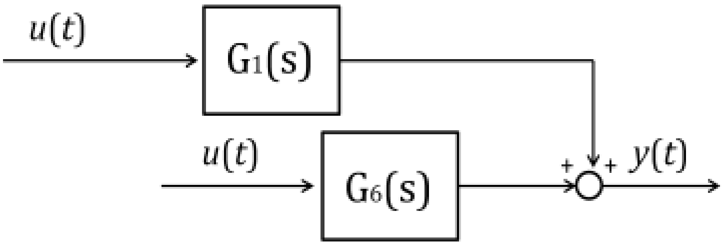
In primo luogo si noti che la funzione di trasferimento $G_1(s)$ si trova in parallelo rispetto al resto dello schema. Inoltre, risolvendo l'anello interno a retroazione negativa (che coinvolge $G_2(s)$) si ottiene che il precedente schema è equivalente al seguente



dove

$$G_5(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)}$$

Si noti quindi che $G_5(s)$ e $G_3(s)$ sono in serie tra loro e che, risolvendo l'anello "esterno" di retroazione negativa si ottiene il seguente schema:



dove

$$G_6(s) = \frac{G_5(s)G_3(s)}{1 + G_5(s)G_3(s)}$$

La funzione $G_{tot}(s)$ cercata si ricava infine come $G_{tot}(s) = G_1(s) + G_6(s)$.

B. Esiste nello schema a blocchi in figura una (o più) funzione di trasferimento la cui asintotica stabilità è necessaria per garantire la asintotica stabilità dell'intero sistema?

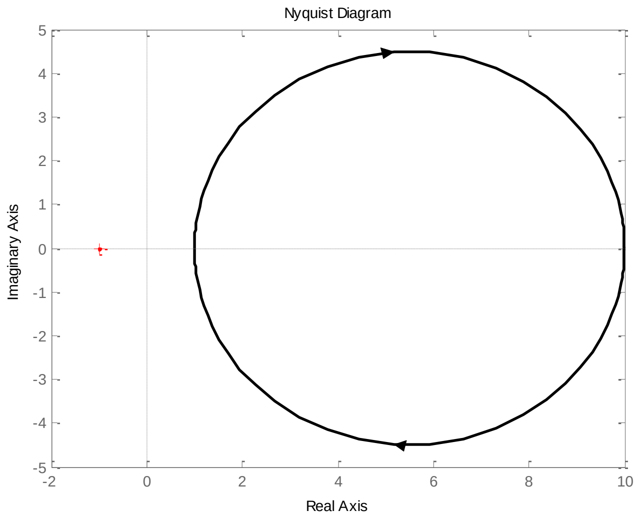
Sì, dato che $G_1(s)$ si trova in parallelo rispetto al resto del sistema, la sua asintotica stabilità risulta necessaria per garantire l'asintotica stabilità dell'intero schema.

ESERCIZIO 4

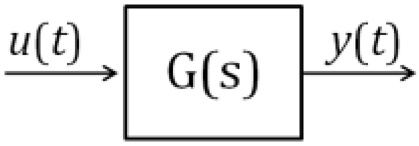
Si consideri la funzione di trasferimento, relativa ad un sistema di ordine 1.

$$G(s) = 10\frac{s+1}{s+10}$$

Per semplicità, il diagramma di Nyquist di $G(s)$ è riportato nella figura seguente:



A. Si risponda (giustificando brevemente ma adeguatamente le risposte) alle seguenti domande relative al sistema <u>ad anello aperto</u> in figura.



a. Il sistema è asintoticamente stabile? *Sì. Dato che il sistema è di ordine 1, presenta un solo autovalore corrispondente con il polo di G(s), cioè $\lambda = -10$.*
b. Il sistema è strettamente proprio? *No, perchè la funzione di trasferimento corrispondente è propria ma non strettamente.*
c. Si ponga $u(t)$=sca(t).

U(s)=1/s, da cui si ottiene

$$Y(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+10)}$$

I teoremi del valore finale e iniziale risultano applicabili, dato che:

- il grado del denominatore di Y(s) è strettamente maggiore del grado del suo numeratore (condizione di applicabilità per t. valore iniziale e t. valore finale);

- Y(s) ha poli con parte reale < 0 *e in s=0 (condizione di applicabilità per t. valore finale).*

- Usando il teorema del valore iniziale (se applicabile) calcolare il valore iniziale della risposta forzata di $y(t)$ all'ingresso dato.

Applicando il t. valore iniziale si ottiene:

$$y(0) = \lim_{s \to +\infty} sY(s) = 10$$

- Usando il teorema del valore finale (se applicabile) calcolare il valore finale della risposta forzata di $y(t)$ all'ingresso dato.

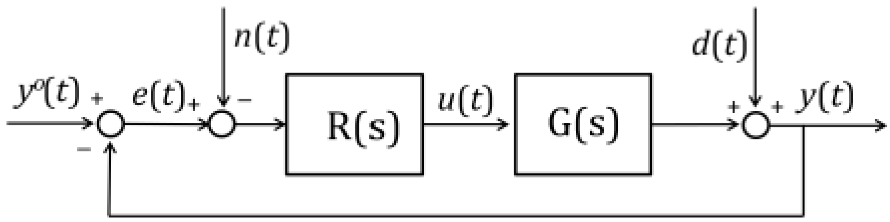
Applicando il t. valore finale si ottiene:

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} sY(s) = 1$$

- In quanto tempo la risposta forzata di $y(t)$ si assesta al valore calcolato?

Il polo del sistema corrisponde a s=-10, la cui costante di tempo è $\tau = 0.1$ *unità di tempo. Il tempo di assestamento risulta quindi essere circa pari a* $T_{ass} \cong 5\tau = 0.5$ *unità di tempo.*

B. Si consideri ora il sistema <u>ad anello chiuso</u> nella figura sottostante:



Si valutino i valori di $k \in \mathbb{R}$ che garantiscono l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso per ciascuna delle seguenti funzioni $R(s)$:

a. $R(s) = \frac{k}{s}$
b. $R(s) = k$

a. Nel caso R(s)=k/s (suppongo che $k \neq 0$ *per ovvie ragioni),*

$$L(s) = k\frac{(s+1)}{s(1+\frac{s}{10})}$$

Si verifica che il criterio di Bode è applicabile per ogni valore considerato di k. Infatti, L(s) risulta strettamente propria, P=0, e il diagramma del modulo attraversa l'asse a 0 dB una sola volta (dall'alto verso il basso).

- Se k>0, il guadagno di L(s) è k>0, e il margine di fase risulta sempre compreso tra 0° e 90°. Pertanto, il sistema ad anello chiuso risulta essere asintoticamente stabile.

- Se k<0, il guadagno della funzione L(s) risulta negativo. Ne risulta che il sistema ad anello chiuso non è asintoticamente stabile.

b. Nel caso R(s) risolvo il problema facendo ricorso al teorema di Nyquist. In particolare, osservando il diagramma di Nyquist di G(s) nella figura sovrastante, e ricordando che L(s)=kG(s)

- se k>0 il diagramma di Nyquist di L(s) "si sviluppa" nel semipiano destro. In questo caso il numero di giri attorno al punto -1 sarà sempre nullo, cioè N=P=0. Dal teorema, si ottiene che il sistema ad anello chiuso risulta asintoticamente stabile.

- se -1/10<k<0 risulta che N=0=P → sistema retroazionato asintoticamente stabile

- se $-1 \leq k \leq -1/10$ *risulta che N=-1 o il diagramma passa per il punto -1. In ogni caso il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.*

- se k<-1, N=0=P → sistema retroazionato asintoticamente stabile.

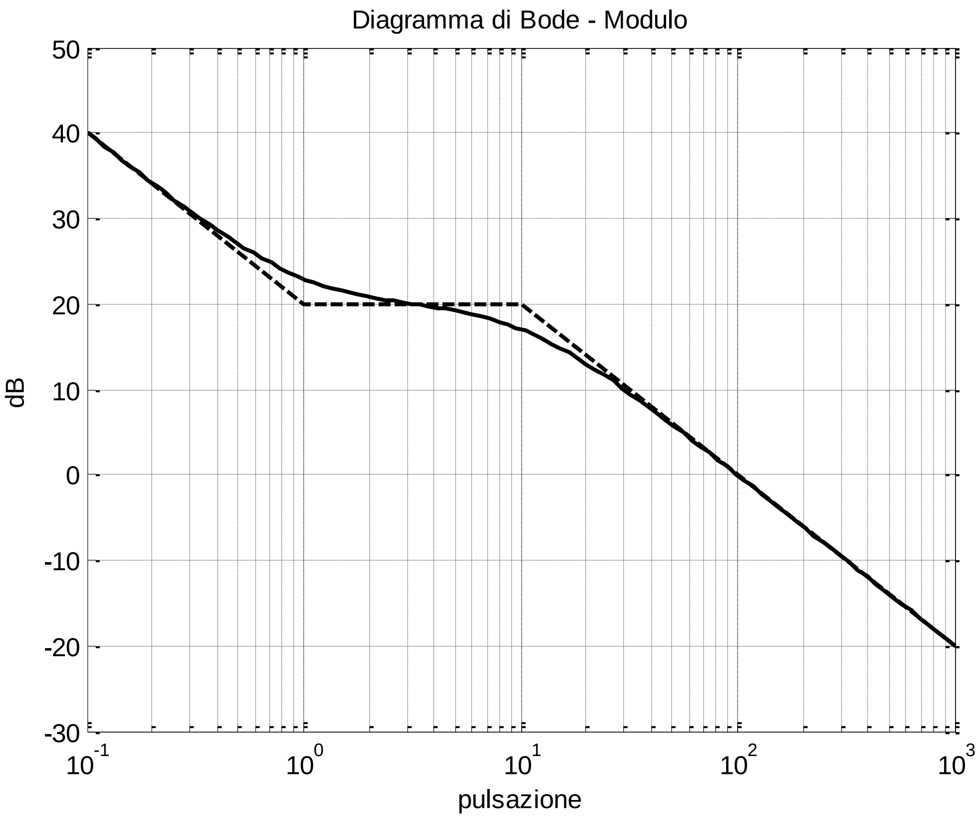
C. Considerando di nuovo il sistema ad anello chiuso mostrato nella figura al punto B. e ponendo $R(s) = \frac{10}{s}$, si risponda alle seguenti domande:

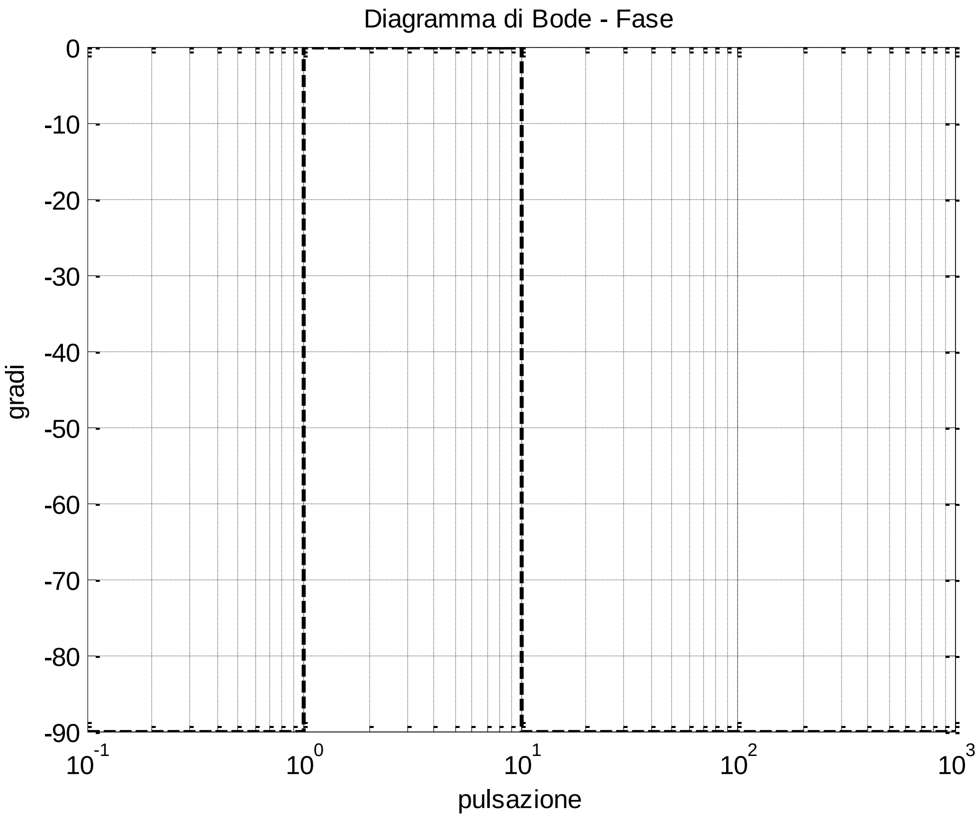
a. Si calcoli in modo approssimato l'espressione della funzione di trasferimento tra la variabile di riferimento $y^o(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Nel caso in esame risulta

$$L(s) = 10\frac{(s+1)}{s(1+\frac{s}{10})}$$

I cui diagrammi di Bode sono i seguenti (per semplicità ho tracciato solo il diagramma asintotico della fase).





Dai diagrammi si ottiene che $\omega_c = 100\ rad/s$ *e* $\varphi_m > 90° > 75°$. *Grazie a quest'ultima proprietà possiamo approssimare la funzione di sensitività complementare cercata con*

$$F(s) = \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}$$

dove $\mu_F = 1$ *in virtù della presenza del polo nell'origine.*

b. Si supponga che $n(t) = \sin(100t)$. Si determini il valore della ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a transitorio esaurito.

Il valore dell'ampiezza della sinusoide in uscita a transitorio esaurito è $|F(j100)| \cong 1$.