INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME

25 luglio 2014

Anno Accademico 2013/2014

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dal modello seguente (detto oscillatore di Van Der Pol):

$$\ddot{x}(t) - \mu(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

A. Si indichi quale dei seguenti è un modello in forma di stato del sistema descritto dalla precedente equazione, giustificando la risposta con gli opportuni conti:

$$M_1: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = & \mu x_1(t)(1 - x_2(t)^2) \end{cases}$$

$$M_2: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = & \mu x_2(t) - x_1(t) \end{cases}$$

$$M_3: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = & -x_1(t) + \mu x_2(t)(1 - x_1(t)^2) \end{cases}$$

Definendo $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$ *si ottiene il sistema* M_3.

B. Si risponda alle seguenti domande relative al sistema ottenuto, motivando brevemente le risposte:

a. è lineare o non lineare? *Il sistema è non lineare.*
b. è statico o dinamico? *Il sistema è dinamico.*
c. è tempo-variante? *Il sistema risulta tempo-invariante.*
d. qual è l'ordine del sistema? *L'ordine del sistema è 2.*

C. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$. *Il sistema linearizzato è il seguente:*

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}$$

dove

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\mu\bar{x}_1\bar{x}_2 - 1 & \mu(1 - \bar{x}_1^2) \end{bmatrix},$$

D. Si calcolino le condizioni di equilibrio per il sistema.

Le equazioni del sistema all'equilibrio si ottengono ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. *L'unica condizione di equilibrio ottenuta è* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0,0)$.

E. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati al punto precedente al variare del parametro μ.

Si ottiene

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

che presenta polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mu\lambda + 1$. *Dato che il polinomio caratteristico ha ordine n=2*

- Se $\mu < 0$ il sistema linearizzato risulta asintoticamente stabile. Dunque l'equilibrio trovato è asintoticamente stabile.
- Se $\mu = 0$ gli autovalori sono immaginari puri, con parte reale pari a 0, ed il sistema linearizzato risulta stabile non asintoticamente. Non si può concludere nulla a proposito delle proprietà di stabilità dell'equilibrio.
- Se $\mu > 0$ il sistema linearizzato risulta instabile. L'equilibrio trovato è pertanto instabile.

F. Si ponga ora $\mu = 0$. Si calcoli il movimento della variabile $x_1(t)$ ottenuto a partire dalla condizione iniziale $x(0) = \left(x_1(0), x_2(0)\right) = (1,0)$.

Per $\mu = 0$ *il sistema risulta lineare, con matrice di sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori del sistema sono pari a $\pm j$*. La risposta libera risulta perciò equivalente alla combinazione lineare dei modi* e^{jt} *e* e^{-jt}*. Ciò è equivalente a movimento del tipo*

$$x_1(t) = \gamma_1 \cos(t) + \gamma_2 \sin(t)$$

dove $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$*.*

Si calcola $x_1(0) = \gamma_1 = 1$*. Inoltre* $\dot{x}_1(t) = -\gamma_1 \sin(\mathrm{t}) + \gamma_2 \cos(t)$ *e quindi* $\dot{x}_1(0) = \gamma_2 = x_2(0) = 0$*. Si ottiene quindi che* $x_1(t) = \cos(t)$*.*

ESERCIZIO 2

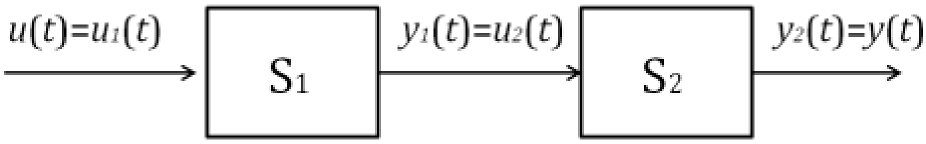
Si considerino i sistemi S_1 e S_2, le cui dinamiche sono descritte dai seguenti modelli:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = & -x_1 + u_1 \\ y_1 = & k(x_1 - u_1) \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = & u_2 \\ y_2 = & 2x_2 \end{cases}$$

A. Si studino le proprietà di stabilità dei sistemi S_1 e S_2.

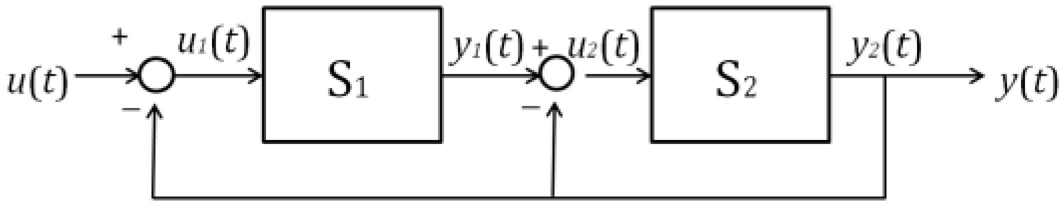
- *Il sistema* S_1 *presenta un autovalore pari a -1 ed è asintoticamente stabile.*
- *Il sistema* S_2 *presenta un autovalore nullo ed è stabile semplicemente.*

B. Si studino le proprietà di stabilità del sistema interconnesso in figura, avente ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.



In quanto il sistema in figura è costituito dalla cascata dei sistemi S_1 *e* S_2*, esso risulta semplicemente stabile.*

C. Si scriva il modello complessivo del sistema interconnesso in figura (si scelga se sviluppare un modello in spazio di stato o la funzione di trasferimento equivalente), avente ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.



Si noti che lo schema precedente si ottiene ponendo $u_1(t) = u(t) - y_2(t)$ e $u_2(t) = y_1(t) - y_2(t)$.

Ponendo $u_1(t) = u(t) - y_2(t)$ e $u_2(t) = y_1(t) - y_2(t)$, *il sistema complessivo in spazio di stato risulta*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = kx_1 + 2(k-1)x_2 - ku \\ y = 2x_2 \end{cases}$$

D. Relativamente allo schema descritto al punto C., si studino le proprietà di stabilità del sistema complessivo al variare del parametro k.

La matrice di sistema corrispondente al precedente sistema è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ k & 2(k-1) \end{bmatrix}$$

che presenta un polinomio caratteristico pari a $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(3-2k) + 2$. *Dato che il polinomio è di grado n=2, condizione necessaria e sufficiente affinchè le sue radici abbiano parte reale strettamente negativa (stabilità asintotica del sistema) è che k<3/2.*

- Se k=3/2, gli autovalori sono immaginari. Il sistema risulta essere stabile non asintoticamente.

- Se k>3/2 il sistema risulta instabile.

E. Relativamente allo schema descritto al punto C., per valori di k in cui il sistema sia asintoticamente stabile, si calcoli il valore di regime a cui tende la risposta forzata della variabile di uscita $y(t)$ a fronte di un ingresso a scalino $u(t)$=sca(t).

Il valore cercato è il guadagno STATICO del sistema ed è pari a

$$-CA^{-1}B = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ k & 2(k-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -k \end{bmatrix} = 0$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & -x_1(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = & -x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = & -10x_3(t) - 6u(t) \\ y(t) = & x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

A. Determinare la funzione di trasferimento G(s) del sistema avente ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$. Si specifichino gli zeri, i poli, il guadagno e il tipo della funzione di trasferimento ottenuta.

Si calcoli la trasformata di Laplace di ambo i membri delle equazioni del sistema (con condizioni iniziali nulle). Si ottiene, grazie al fatto che il sistema è costituito da tre sottosistemi scalari in serie tra loro:

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{2}{s+1}U(s) \\ X_2(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) \\ X_3(s) = \dfrac{-6}{s+10}U(s) \\ Y(s) = \left(\dfrac{3}{s+1} - \dfrac{6}{s+10}\right)U(s) \end{cases}$$

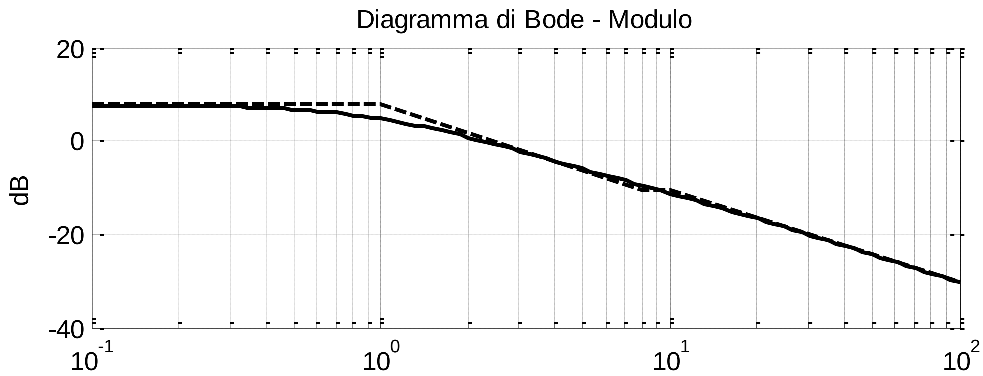
Si ottiene quindi:

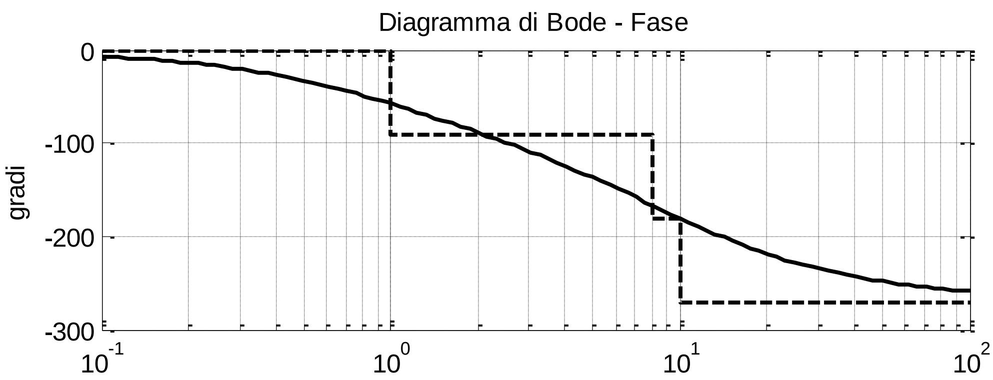
$$G(s) = 2.4\frac{(1-\frac{s}{8})}{(1+s)(1+\frac{s}{10})}$$

- *Tipo: g=0*
- *Guadagno:* $\mu = 2.4$
- *Zero: s=8*
- *Poli: s=-1;s=-1.*

B. Si traccino i diagrammi di Bode di modulo e fase asintotici della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento G(s).

I diagrammi di Bode asintotici di modulo e fase sono mostrati in figura.





C. Si calcoli il movimento forzato dell'uscita rispetto all'ingresso $u(t) = e^{-t}\text{sca}(t)$.

La trasformata di Laplace del segnale di ingresso è U(s)=$\frac{1}{s+1}$*, da cui si ottiene che*

$$Y(s) = \frac{-3s+24}{(s+1)^2(s+10)} = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_3}{s+10}$$

Si calcola che $\alpha_1 = -2/3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2/3$*. Ne segue che la risposta forzata cercata è la seguente:*

$$y(t) = \left(-\frac{2}{3}e^{-t} + 3te^{-t} + \frac{2}{3}e^{-10t}\right)\text{sca}(t)$$

D. Si disegni qualitativamente l'andamento della risposta forzata della variabile di uscita rispetto ad un ingresso a scalino $u(t)$=sca(t) (considerando debitamente il tempo di assestamento, la presenza di zeri, etc.).

La trasformata di Laplace del segnale di ingresso è U(s)=$\frac{1}{s}$*, da cui si ottiene che*

$$Y(s) = \frac{-3s+24}{s(s+1)(s+10)}$$

Il teorema della risposta finale è applicabile, dato che Y(s) presenta un numero di poli strettamente maggiore del numero di zeri e che presenta poli nulli o con parte reale negativa. Risulta:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = 2.4$$

Il teorema della risposta iniziale è applicabile, dato che Y(s) presenta un numero di poli strettamente maggiore del numero di zeri. Risulta:

$$y(0) = \lim_{s\to+\infty} sY(s) = 0$$

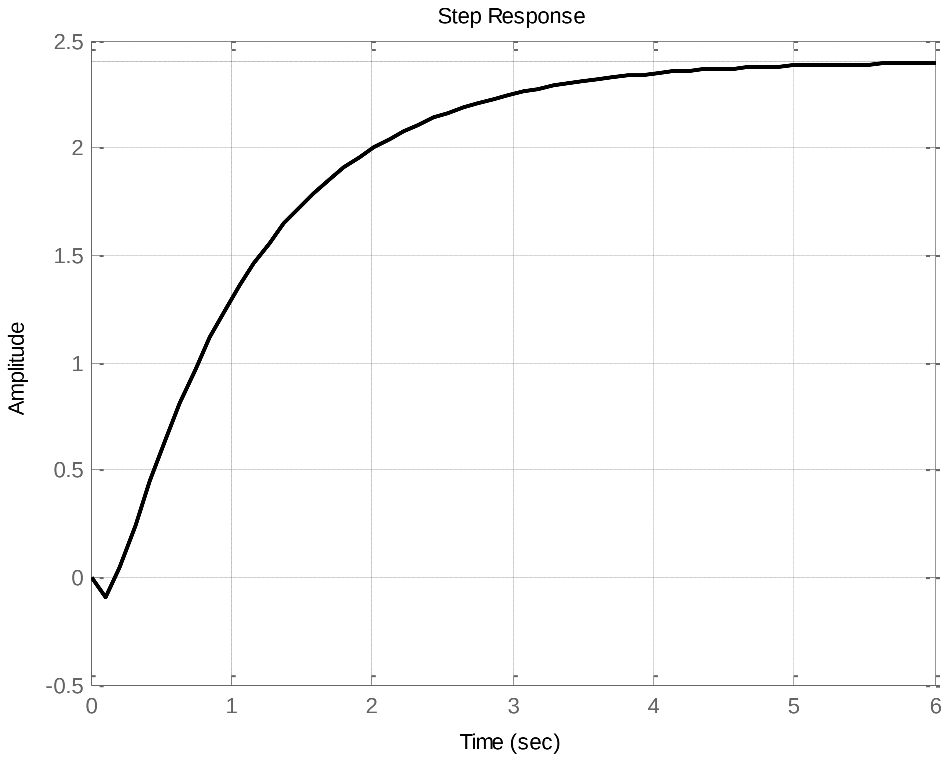
Si calcola inoltre che $\mathcal{L}(\dot{y}(t)) = sY(s) - y(0) = sY(s)$*. A tale funzione si può applicare il teorema della risposta iniziale. Risulta*

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to+\infty} s\mathcal{L}(\dot{y}(t)) = \lim_{s\to+\infty} s^2Y(s) = -3$$

che ha segno opposto rispetto al guadagno in virtù della presenza dello zero a fase non minima. Si verifica dunque il fenomeno della risposta inversa.

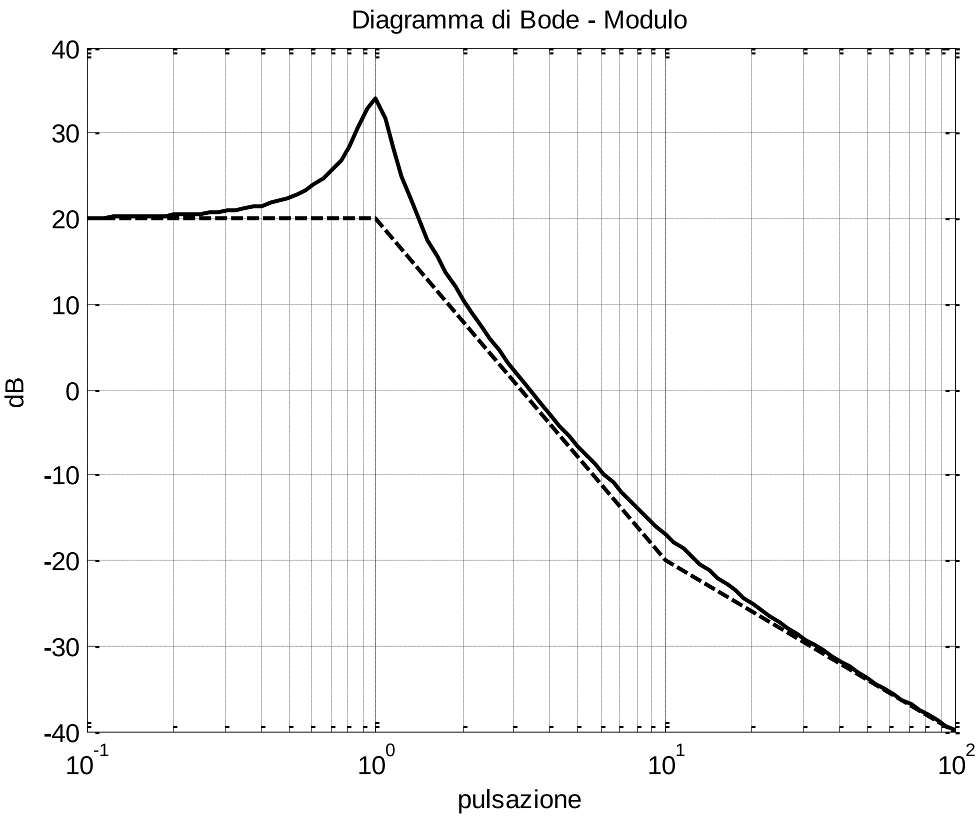
Il tempo di assestamento è caratterizzato dal polo dominante (s=-1), che ha costante di tempo $\tau = 1$ *s. Dunque* $T_{ass} \cong 5\tau = 5$ *s.*

In definitiva, si ottiene un grafico della risposta come quello in figura.

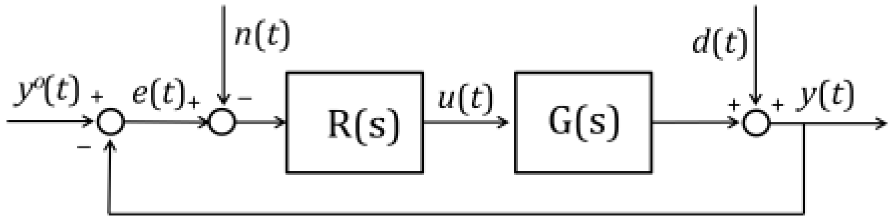


ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di ordine 2 avente funzione di trasferimento $G(s)$ **a fase minima** il cui modulo presenta il seguente diagramma di Bode.



Si consideri il sistema <u>ad anello chiuso</u> nella figura sottostante:



A. Si studino le proprietà di stabilità del sistema ad anello chiuso per ciascuna delle seguenti funzioni di trasferimento $R(s)$:

a. $R(s) = 1$
b. $R(s) = \frac{0.5}{s}$

In primo luogo, dato che la funzione di trasferimento del sistema è a fase minima, essa

- *ha guadagno generalizzato di segno positivo*
- *presenta singolarità con parte reale negativa o nulla*
- *non presenta ritardi.*

Per cui, dal diagramma di Bode si possono individuare le seguenti proprietà di G(s):

- *g=0, dato che la pendenza del tratto iniziale è nulla.*
- $\mu = 10$.
- *presenta due poli complessi coniugati con pulsazione naturale* $\omega_n = 1$ *rad/s. Per individuare lo smorzamento* ξ *basta ricordare che la differenza tra il diagramma reale e il diagramma asintotico è* $|\frac{1}{2\xi}|_{dB} = 14$ *dB. Si ottiene quindi che* $\frac{1}{2\xi} = 5$, *da cui* $\xi = 0.1$.
- *presenta uno zero reale in s=-10.*

Si ottiene perciò che

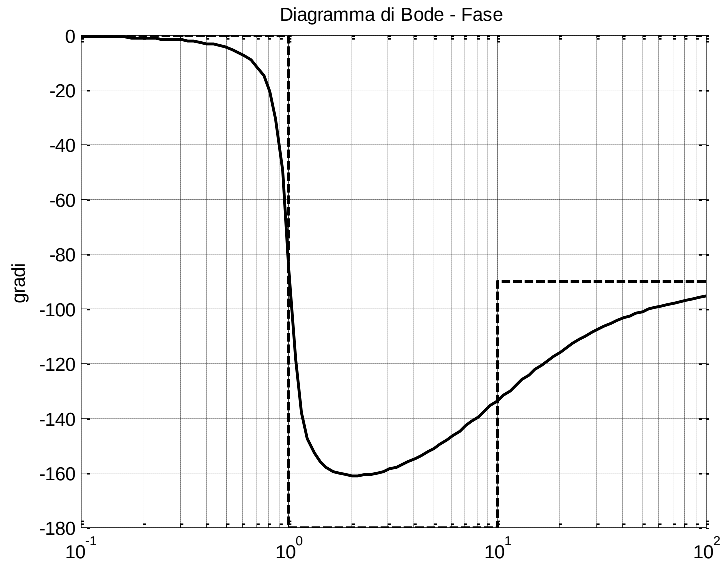
$$G(s) = 10\frac{(1 + s/10)}{1 + 0.2s + s^2}$$

Si considerino ora i casi a, b, c.

a. Se $R(s) = 1$, *L(s)=G(s). Si verificano le condizioni di applicabilità del criterio di Bode. Infatti*

- *L(s) è strettamente propria.*
- *Il diagramma di Bode del modulo (si veda la figura sopra) interseca una e una sola volta l'asse a zero dB (dall'alto verso il basso).*
- *P=0.*

La pulsazione di taglio di L(s) è circa $\omega_c \cong 3$ *rad/s. E' facile tracciare il diagramma di Bode della fase, nella figura sottostante.*

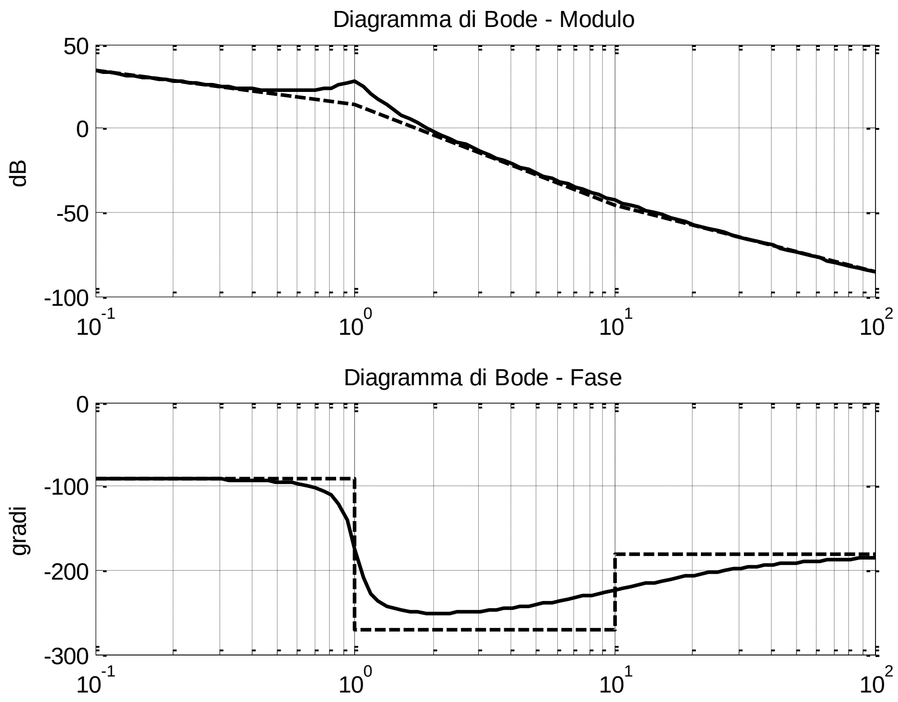


Si calcola facilmente che $-180° < \varphi_c < -90°$*. In particolare* $\varphi_c \cong \measuredangle L(j3) = \measuredangle(1 + j0.3) - \measuredangle(-8 + j0.6) = 16.7° - 175.7° = -159°$*. Da questo deriva che* $\varphi_m = 180 - |\varphi_c| \cong$ *21°>0. Dato che, inoltre,* $\mu > 0$*, il criterio di Bode garantisce che il sistema ad anello chiuso corrispondente è asintoticamente stabile.*

b. Nel caso $R(s) = \frac{0.5}{s}$ *si ottiene che*

$$L(s) = 5\frac{(1 + s/10)}{s(1 + 0.2s + s^2)}$$

I diagrammi do Bode (di modulo e fase) corrispondenti sono i seguenti.



Si verificano le condizioni di applicabilità del criterio di Bode. Infatti

- *L(s) è strettamente propria.*
- *Il diagramma di Bode del modulo (si veda la figura sopra) interseca una e una sola volta l'asse a zero dB (dall'alto verso il basso).*
- *P=0.*

E' facile verificare graficamente che la pulsazione critica di L(s) è $\omega_c \cong 2$ *rad/s e che* $\varphi_c < -180°$*. Questo risultato può essere facilmente ottenuto notando che* $\omega_c > \omega_n$ *(pulsazione naturale dei poli complessi coniugati) e pensando che lo sfasamento conferito dai poli coniugati stessi in* ω_n *è di -90°, che si somma allo sfasamento costante e pari a -90° conferito dal polo nell'origine. Questo fa sì che, nonostante la presenza dello zero (a pulsazione maggiore),* $\measuredangle L(j\omega) < -180°$ *per* $\omega > \omega_n$*. Dato che quindi* $\varphi_m < 0$*, per il criterio di Bode possiamo concludere che il sistema ad anello chiuso corrispondente non è asintoticamente stabile.*

B. Si risponda alle seguenti domande per ognuna delle funzioni di trasferimento $R(s)$ per cui l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso è garantita:

Si considera dunque solo il caso a.

a. Si calcoli in modo approssimato l'espressione della funzione di trasferimento tra la variabile di riferimento $y^o(t)$ e l'uscita $y(t)$.

La funzione cercata è la funzione di sensitività complementare F(s). essa, dato che $\varphi_m \cong 21°$*, si approssima come:*

$$F(s) = \frac{\mu_F}{1 + 2\frac{\xi_F}{\omega_c}s + \frac{s^2}{\omega_c^2}}$$

dove $\xi_F \cong \frac{\varphi_m}{100} = 0.21$ *e* $\mu_F = \frac{\mu_L}{1+\mu_L} = \frac{10}{11}$*. Si noti che tale approssimazione trascura lo zero in s=-10: una approssimazione più corretta potrebbe essere*

$$F(s) = \frac{\mu_F(1 + s/10)}{1 + 2\frac{\xi_F}{\omega_c}s + \frac{s^2}{\omega_c^2}}$$

b. Si supponga che $n(t) = \sin(10t)$. Si determini il valore della ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a transitorio esaurito.

Dato che $10 > \omega_c$*, il valore dell'ampiezza della sinusoide in uscita a transitorio esaurito è* $|F(j10)| \cong |L(j10)| = 0.1$*.*

c. Si supponga che $d(t) = \sin(0.01t)$. Si determini il valore della ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a transitorio esaurito.

La funzione di trasferimento tra il disturbo $d(t)$ *e l'uscita* $y(t)$ *è la funzione di sensitività*

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

Per $\omega \ll \omega_c$ *(come in questo caso), è lecito approssimare*

$$|S(j\omega)| \cong \frac{1}{|L(j\omega)|}$$

Dal diagramma di Bode si ottiene che $|L(j0.01)|_{dB} = 20\ dB$*, cioè* $|L(j0.01)| = 10$*, da cui* $|S(j\omega)| \cong 0.1$*, che corrisponde alla ampiezza della sinusoide in uscita al sistema a transitorio esaurito.*