INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prof. Marcello Farina

TEMA D'ESAME e SOLUZIONI

Prima prova *in itinere* – 06 maggio 2015

Anno Accademico 2014/2015

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\sin\big(x_1(t)\big) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + u^2(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

A. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.

Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$. *Il sistema linearizzato è il seguente:*

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\, \delta u$$

$$\delta y = C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\, \delta u$$

dove

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -\cos(\bar{x}_1) & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\bar{u} \end{bmatrix}$$

$$C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = 0$$

B. Si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti agli ingressi:

1. $u(t) = \bar{u} = 1$.

   Le condizioni di equilibrio cercate sono $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi + 1, 1\right), k \in \mathbb{Z}$.

2. $u(t) = \bar{u} = 0$

   Le condizioni di equilibrio cercate sono $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (k\pi, k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.

C. Determinare il movimento dell'uscita ottenuto a partire dalla condizione iniziale $(x_1(0), x_2(0)) = (0,1)$ e ingresso $u(t) = 0$.

Per $x_1(0) = 0$ *e* $u(t) = 0$, $\dot{x}_1(t) = 0\ \forall t$, *cioè* $x_1(t) = 0\ \forall t$. *La seconda equazione risulta* $\dot{x}_2(t) = -x_2(t)$, *da cui* $y(t) = x_2(t) = e^{-t} x_2(0) = e^{-t}$.

D. Determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio calcolati al punto B. (CONSIGLIO: per i punti di equilibrio ottenuti per $u(t) = \bar{u} = 1$ sarà necessario applicare il metodo grafico alla prima equazione, osservando la struttura a cascata del sistema).

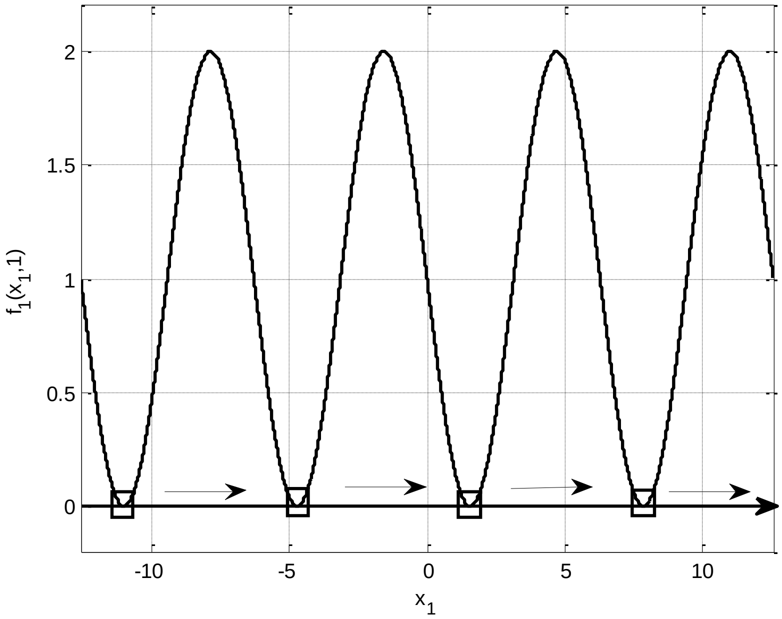
1. Per i punti di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi + 1, 1\right), k \in \mathbb{Z}$, *la matrice* $A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ *del sistema linearizzato risulta*

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

avente un autovalore pari a 0. Questo significa che il metodo non ci permette di concludere nulla a proposito delle proprietà di stabilità delle condizioni di equilibrio in questione. Per poter risolvere il problema ricorriamo al metodo grafico applicato alla prima equazione (indipendente rispetto alla seconda), dove si pone $u(t) = 1$*:*

$$\dot{x}_1(t) = -\sin\big(x_1(t)\big) + 1 = f_1(x_1(t), 1)$$

Il grafico di $f_1(x_1, 1)$ *è il seguente:*



Dato che $f_1(x_1, 1) \geq 0 \; \forall x_1$ *gli equilibri trovati sono instabili.*

2. Per i punti di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (k\pi, k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$*, esistono due casi:*

2.a. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (2k\pi, 2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$*, in cui*

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e che quindi risultano condizioni di equilibrio asintoticamente stabili.

2.b $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \big((2k+1)\pi, (2k+1)\pi, 0\big), k \in \mathbb{Z}$*, in cui*

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e che quindi risultano condizioni di equilibrio instabili.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & a(x_1(t) - x_2(t)) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & 4x_1(t) - 3x_2(t) \\ y(t) & = & ax_2(t) \end{cases}$$

A. Studiare le proprietà di stabilità del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Si calcola che

$$A = \begin{bmatrix} a & -a \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0\ a], D = 0$$

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \lambda^2 + (3-a)\lambda + a$*. nel caso in cui n=2 condizione necessaria e sufficiente affinchè gli autovalori di A abbiano parte reale negativa è che i segni dei coefficienti dei termini del polinomio caratteristico siano concordi. Da ciò si ricava:*

- $0 < a < 3$*: il sistema è asintoticamente stabile*
- $a < 0$ *o* $a > 3$*: almeno uno degli autovalori ha parte reale positiva e il sistema è instabile*
- $a = 0$*: gli autovalori sono* $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0$ *e il sistema risulta stabile semplicemente*
- $a = 3$*: gli autovalori sono* $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{3}$ *e il sistema risulta stabile semplicemente*

B. Si ponga $a = 1$. Calcolare il movimento libero dell'uscita, ottenuto con la seguente condizione iniziale

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui a=1,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

che risulta avere un autovalore $\lambda = -1$ *con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. questo significa che i modi del sistema sono* e^{-t} *e* te^{-t}*. Pertanto* $y(t) = \gamma_1 e^{-t} + \gamma_2 te^{-t}$*, da cui* $\dot{y}(t) = -\gamma_1 e^{-t} + \gamma_2 e^{-t} - \gamma_2 te^{-t}$*. Le equazioni risultanti sono:*

- $y(0) = \gamma_1 = Cx(0) = 1$
- $\dot{y}(0) = \gamma_2 - \gamma_1 = CAx(0) = -3$

da cui si ricava che $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -2$.

C. Nel caso $a = 1$, calcolare le condizioni di equilibrio per le variabili di stato e per l'uscita in corrispondenza di un generico ingresso costante $u(t) = \bar{u}$. E' un equilibrio asintoticamente stabile?

Si calcola

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} = \begin{bmatrix} 3\bar{u} \\ 4\bar{u} \end{bmatrix}$$

e $\bar{y} = 4\bar{u}$*. L'equilibrio è asintoticamente stabile.*

ESERCIZIO 3

Si consideri di nuovo il sistema definito nell'ESERCIZIO 2, dove si ponga $a = 1$.

Nel caso specificato

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0\ 1], D = 0$$

A. Si scriva la funzione di trasferimento del sistema.

Si calcola

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{4}{(s+1)^2}$$

B. Si consideri un ingresso $u(t)$ =sca(t). Si determini l'espressione della risposta forzata dell'uscita.

La trasformata di Laplace del segnale di ingresso è U(s)=1/s, da cui segue che

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{s(s+1)^2} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2}$$

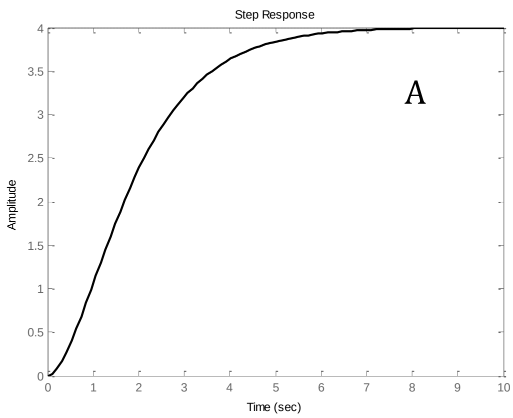
I parametri α_1 e α_3, si possono calcolare direttamente con il metodo dei residui. Si calcola:

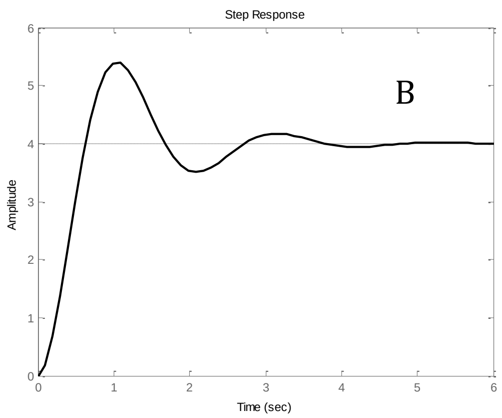
$$\alpha_1 = sY(s)|_{s=0} = 4, \alpha_3 = (s+1)^2 Y(s)|_{s=-1} = -4$$

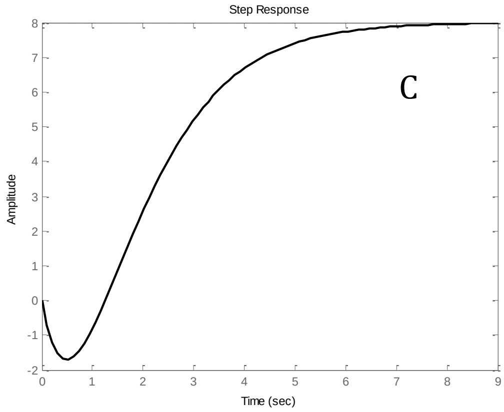
Con l'approccio diretto si calcola inoltre che $\alpha_2 = -4$. Si ottiene infine che:

$$y(t) = 4(1 - e^{-t} - te^{-t})sca(t)$$

C. Relativamente alla risposta forzata determinata al punto precedente, si indichi, motivando adeguatamente la risposta, a quale grafico corrisponde, tra quelli sottostanti.







E' possibile procedere per esclusione:

- *Il grafico B si può escludere in virtù del fatto che non sono presenti autovalori complessi coniugati.*
- *Il grafico C può essere escluso in virtù del fatto che $y(t) \to 4$ per $t \to +\infty$, mentre nel grafico il valore di regime equivale a y=8. Inoltre C può essere escluso in virtù del fatto che in G(s) non sono presenti zeri con parte reale positiva, e quindi il fenomeno della risposta inversa è escluso.*

ESERCIZIO 4

Si consideri la seguente funzione di trasferimento, relativa ad un sistema di ordine 3.

$$G(s) = \frac{s-3}{3s^3 + s^2 + 4s + 1}$$

A. Relativamente a $G(s)$, si determinino

a) guadagno (generalizzato): *dato che non sono presenti poli o zeri nell'origine, si può calcolare* $\mu = G(0) = -3$.
b) tipo: *g=0.*
c) zeri: *è presente uno zero, in s=3.*
d) costante di trasferimento: $\rho = \frac{1}{3}$.

B. Si risponda alle seguenti domande:

a) La funzione è strettamente propria? *Sì, dato che il grado relativo è 2.*
b) Il sistema è asintoticamente stabile? *Dato che il numero di poli (ordine del denominatore di G(s)) è pari all'ordine del sistema, gli autovalori del sistema sono i poli della funzione di trasferimento, e il denominatore di G(s) è il polinomio caratteristico. Per valutare se la parte reale di tutti gli autovalori è strettamente negativa posso applicare il criterio di Routh. La tabella di Routh-Hurwitz risultante è:*

3	4
1	1
1	0
1	

Dato che la tabella è ben definita e i segni degli elementi della prima colonna sono concordi, tutti gli autovalori del sistema hanno parte reale strettamente negativa, e il sistema risultaasintoticamente stabile.

C. Si calcoli la trasformata di Laplace $Y(s)$ della risposta $y(t)$ del sistema allo scalino di ampiezza unitaria $u(t)$ =sca(t).

Dato che U(s)=1/s, risulta

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-3}{s(3s^3 + s^2 + 4s + 1)}$$

D. Si verifichi, motivando adeguatamente la risposta, che le ipotesi di applicabilità dei teoremi della risposta iniziale e finale sono verificate. Utilizzando tali teoremi, si calcolino $y_\infty = \lim_{t\to+\infty} y(t)$ e $y(0)$.

I teoremi del valore finale e iniziale risultano applicabili, dato che:

- il grado del denominatore di Y(s) è strettamente maggiore del grado del suo numeratore (condizione di applicabilità per t. valore iniziale e t. valore finale);

- Y(s) ha poli con parte reale < 0 *e in* $s = 0$ *(condizione di applicabilità solo per t. valore finale).*

Applicando il t. valore iniziale si ottiene:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$$

Applicando il t. valore finale si ottiene:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} sY(s) = -3$$